Alejandro Gronskis

Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Unidad de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la Marina Mercante

# Modelos de orden reducido

## Interés de la reducción de modelos en control de flujos

En las dos últimas décadas, el control de flujos ha sido objeto de un gran número de estudios experimentales y numéricos. Si bien por un lado la literatura que presenta las acciones de control es floreciente (podemos citar al respecto la revisión exhaustiva de Gad-el-Hak), por otro lado persiste aún la necesidad de optimizar la acción de control, ya sea para guiar la construcción de nuevos actuadores basados en tecnologías de materiales recientes (piezocerámicos, sistemas micro-electro-mecánicos, etc.) o bien para mejorar el rendimiento energético de mecanismos de control existentes. Por consiguiente, resulta de fundamental importancia contar con leyes de control óptimo; esto es, la mejor acción posible (por ejemplo, la más eficaz frecuencia de inyección) para lograr un objetivo dado (por ejemplo, reducir el arrastre por presión). A fin de determinar tales leyes, los estudios paramétricos simples son rápidamente descartados puesto que entran en juego un gran número de parámetros de control (posición y orientación del actuador, caudal de inyección, etc.). En efecto, el cálculo de superficies de respuesta de grandes dimensiones requiere de un costo computacional a menudo prohibitivo. Resta sin embargo la posibilidad de optimizar, a un menor costo computacional, cada parámetro en forma independiente de los otros a fin de tener una idea de un punto de funcionamiento eficaz. Pero esta aproximación no permite en ningún caso concluir sobre el punto de funcionamiento óptimo, cuyo conocimiento resulta de fundamental importancia en el contexto de problemas industriales en los cuales es prioritaria la noción de rendimiento energético.

Para resolver este tipo de problemas de optimización se emplea el control óptimo. Este método se basa en la minimización o maximización de un funcional objetivo (coeficiente de arrastre o sustentación, concentración de contaminante, ruido emitido, mezclado, etc.) con respecto a ciertos parámetros de control (velocidades de inyección o succión, flujos de calor, parámetros de diseño, etc.) bajo ciertas restricciones (ecuaciones de Navier-Stokes, restricciones geométricas, etc.). La aplicación de este método al control activo de flujos en sistemas de lazo cerrado requiere que el controlador determine su acción en tiempo real. En consecuencia, las ecuaciones de Navier-Stokes deberían ser resueltas un gran número de veces durante el transcurso del proceso de optimización, generando un costo excesivo de cálculo computacional en el contexto de problemas reales de control de flujos.

## Una solución

A fin de facilitar la puesta en práctica del control óptimo podemos proponer el reemplazo de las ecuaciones de Navier-Stokes por un modelo simple que sea capaz de representar en forma precisa el comportamiento dinámico esencial del flujo bajo estudio. Es posible expresar este modelo a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ROM - Reduced Order Model).

Podemos determinar este conjunto empleando instantáneas del escurrimiento (*snapshots*) provenientes de experimentos físicos o numéricos y representando el campo de flujo por una base ortonormal de funciones espaciales, cada una de las cuales tiene asociado un coeficiente dependiente del tiempo.

Para determinar la base es posible usar el método de descomposición en modos ortogonales (POD - Proper Orthogonal Decomposition), donde los modos espaciales y los coeficientes temporales se calculan a partir de una descomposición en valores singulares de la matriz de datos experimentales (Holmes et al.).

Puesto que los modos espaciales son ortonormales, la proyección Galerkin de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo la hipótesis de flujo incompresible nos permite reducir el sistema a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) (Holmes et al.). El sistema obtenido constituye un modelo de orden reducido (POD ROM) en el cual los coeficientes involucrados dependen de las funciones base y del campo de presión. Para el caso de flujos en la estela hay evidencia de que el término dependiente de la presión tiene efectos despreciables.

La resolución de este sistema de ecuaciones nos otorga la evolución temporal de la dinámica del flujo limitada a un subespacio POD. Este modelo puede entonces ser empleado en reemplazo de las ecuaciones de Navier-Stokes como ecuaciones de estado en el contexto de la resolución de un problema de optimización.

## Descomposición en modos ortogonales, POD

El método Proper Orthogonal Decomposition (Descomposición en modos ortogonales, POD), conocido también como Descomposición de Karhunen-Loeve, sirve esencialmente para la identificación y la construcción de modelos reducidos que proporcionan descripciones aproximadas de problemas dinámicos complejos. Fue introducido en el contexto de la Mecánica de los Fluidos por Lumley. Ha sido utilizado por distintos autores (para una revisión completa véase por ejemplo Holmes et al.) como una manera de obtener descripciones aproximadas de estructuras de gran escala, o estructuras coherentes.

- Según Hussain, una estructura coherente es un dominio donde la vorticidad instantánea presenta un alto nivel de correlación espacial.
- Para Lumley, una estructura coherente corresponde a un objeto espacio temporal cuya proyección sobre el campo de velocidades del escurrimiento es máxima en el sentido de mínimos cuadrados.
- Para Lesieur, un dominio que contiene una concentración de vorticidad local será considerado como coherente si conserva una forma reconocible durante un tiempo suficientemente largo (del orden de 5 veces) comparado con su período de recurrencia.

La técnica ha sido utilizada en varias disciplinas como por ejemplo el análisis de procesos estocásticos, procesamiento de imágenes, análisis de señales, identificación de procesos y control en ingeniería química, oceanografía, compresión de datos de computación, como herramienta de búsqueda de información en informática, etc.

A partir de la observación de un fenómeno fluidodinámico, proveniente tanto de simulaciones numéricas como de experimentos, la POD reconoce los patrones recurrentes del mismo. A partir de ello, se construye un modelo de representación lineal, que es óptimo respecto de todas las representaciones lineales posibles. El modelo permite la reducción de la dimensión de las ecuaciones de Navier Stokes hacia un sistema de ecuaciones ordinarias en el cual puede recuperarse la dinámica esencial de un escurrimiento.

Sin hipótesis a priori sobre los escurrimientos, la técnica POD consigue representarlos como una media y la superposición de funciones base, o modos, ordenadas decrecientemente respecto a su contenido de energía cinética.

El modelo resultante de la descomposición, reproduce las estructuras coherentes del flujo a partir de los modos espaciales o de combinaciones lineales de los mismos. En flujos de moderada turbulencia, es posible realizar buenas aproximaciones del campo de velocidades con un reducido número de modos.

## Base POD

A fin de poder construir una base de funciones sobre la cual podamos resumir el comportamiento de un flujo, es necesario realizar una serie de definiciones. Trabajamos con campos de velocidades $u(x1, x2, x3, t)$, funciones definidas en un dominio $W$. Pueden considerarse todas las dimensiones del problema descriptas en $W$, de modo que un elemento $x \in W$ puede representar un elemento espacio-temporal $(x1, x2, x3, t)$. Suponemos que los campos $u(x)$

pertenecen a un espacio de Hilbert, $L^2(W)$ de funciones de cuadrado integrable, con producto interno definido por:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v^*(x) dx$$

donde $v^*$ denota el conjugado complejo de $v$.

En aplicaciones de mecánica de fluidos, considerar las funciones correspondientes a los campos de velocidades u pertenecientes al espacio $L^2(W)$ es una hipótesis razonable, pues ello implica, en un espacio y tiempo acotados, que la energía cinética integrada en el dominio analizado permanece finita.

En caso de contar con funciones vectoriales $u(x) = (u1(x), u2(x), u3(x))$, el producto interno se define según:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (u_1 v_1^* + u_2 v_2^* + u_3 v_3^*)\, dx$$

Para simplificar la notación, en los sucesivos desarrollos consideramos campos escalares, sabiendo que es simple la extensión a campos vectoriales.

Definimos promedios temporales con la siguiente notación:

$$\langle u(x_1, x_2, x_3, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u(x_1, x_2, x_3, t_i)$$

donde $N$ es un número de instantes suficientemente grande como para asegurar la convergencia.

Un fenómeno físico se considera ergódico cuando resultan equivalentes los promedios temporales de una magnitud y los promedios estadísticos de la misma. Utilizaremos como hipótesis en el análisis de flujos turbulentos, que éstos son ergódicos. Considerando una sucesión de muestras de campos de velocidades, $u^k$, podemos afirmar:

$$\langle u(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u^{(k)}(x)$$

Entre las descomposiciones posibles del conjunto $u^k$ sobre una base de funciones $\{\Psi\}$, nos interesamos por una que nos permita asegurar que la cantidad $|(u, \Psi)|2$ sea la máxima posible. Esto significa que la proyección de las $u^k$ sobre la base de funciones $\{\Psi\}$ sea óptima en relación a la energía cinética, entre todas las posibles bases.

## Base óptima

Es posible verificar que la base $\{\Phi\}$ resulta óptima frente a cualquier otra base de $L^2(W)$, de forma que es máximo $|(u, \Phi)|2$. Si examinamos la descomposición de la velocidad u en una base ortonormal cualquiera, la energía cinética promedio puede ser cuantificada con la expresión:

$$\frac{1}{2}\left\langle \int_\Omega uu dx \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \int_\Omega \sum_i b_i \psi_i \sum_j b_j \psi_j dx \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\left\langle \sum_i b_i b_j \int_\Omega \psi_i \psi_j dx \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle b_i b_i \rangle$$

Tenemos así escrita la energía cinética contenida en función de los coeficientes de la base.

En consecuencia, podemos conocer el contenido energético de los primeros $n$ modos de la descomposición a partir de la suma de los primeros n autovalores.

Puede demostrarse que para las primeras n funciones base se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle a_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{n} \langle b_i b_i \rangle$$

Es decir, la base POD es óptima dentro de la clase de representaciones mediante superposiciones lineales; las primeras n funciones base POD capturan igual o más energía que las primeras n funciones de cualquier otra base.

## Modos espaciales y temporales

En la definición del espacio de Hilbert, hemos considerado para el desarrollo que las dimensiones espaciales y de tiempo se confunden en una sola variable $x$. Los productos internos en $W$ son entonces integrales sobre las dimensiones tanto espaciales como la temporal. En vista del desarrollo de modelos reducidos de la ecuación de Navier Stokes, buscaremos solamente una base de funciones espaciales. Luego, los coeficientes $a_i$ son dependientes del tiempo, y el campo de velocidades puede escribirse según:

$$u(x, t) = \sum_i a_i(t) \varphi_i(x)$$

Por esta razón se reconocen los modos temporales $a_i$ y los modos espaciales $f_i$ de la descomposición.

## Implementación

En la práctica los datos se obtienen discretizados en tiempo y espacio con lo cual la ecuación integral se reduce a un problema estándar de autovalores. En este caso, la POD es equivalente a la descomposición en valores singulares de una matriz. La matriz se construye considerando las observaciones del campo de velocidades $u(x_i, t_j)$, donde $x_i$ es una coordenada espacial y $t_j$ una secuencia de instantes de tiempo:

$$u = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^{(1)} & \vec{u}_1^{(2)} & \dots & \vec{u}_1^{(M)} \\ \vec{u}_2^{(1)} & \vec{u}_2^{(2)} & \dots & \vec{u}_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_N^{(1)} & \vec{u}_N^{(2)} & \dots & \vec{u}_N^{(M)} \end{pmatrix}$$

de modo que su descomposición en valores singulares proporciona las funciones base. Siendo $c$ por construcción una matriz cuadrada simétrica, la formulación coincide con el problema de diagonalización de $c$. Es decir:

$$c = U\Sigma U^*$$

donde $U$ representa una matriz de autovectores y $\Sigma$ la matriz diagonal formada por los autovalores de $c$ ordenados de mayor a menor.
Luego, los autovectores de c corresponden a los modos temporales del flujo, $a_i(t_j)$. Sabemos que los modos espaciales pueden expresarse como combinación lineal de las observaciones; en consecuencia, los $\Phi i(x)$ se obtienen según:

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{M} a_i(t_k)u(x, t_k)$$

## Ejemplo de aplicación

A modo de ilustración de las herramientas descriptas para el análisis de datos de mecánica de fluidos, se presenta en la Figura (a) una instantánea típica para el escurrimiento en la estela de un cilindro a $Re = 125$.
Los modos espaciales, la Figura (b) muestra el primero de ellos, se calculan a partir de la expresión anteriormente dada por la SVD.
Asimismo se representa el modo temporal asociado, Figura (c), $a_1(t)$, resultado de la proyección del campo de velocidades instantáneo sobre el modo 1.

Figura a

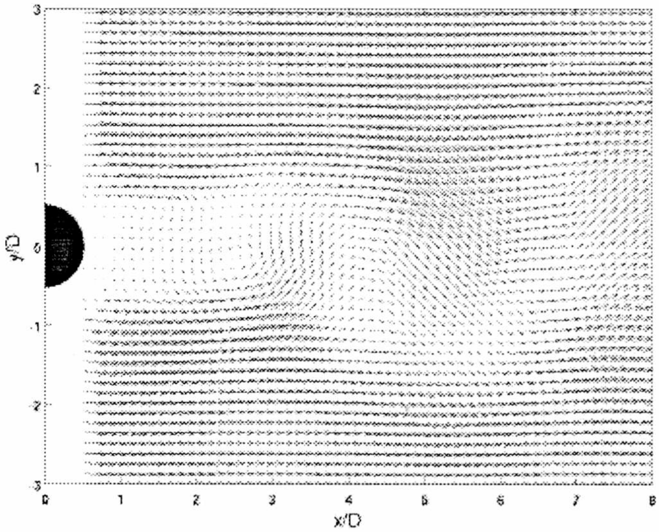



Figura b

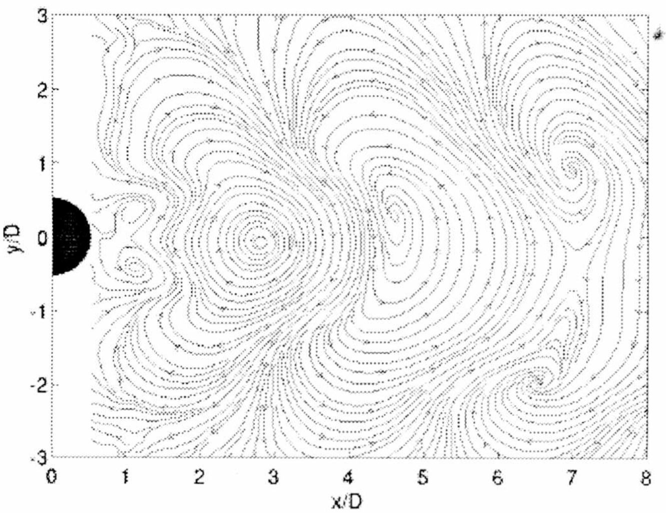
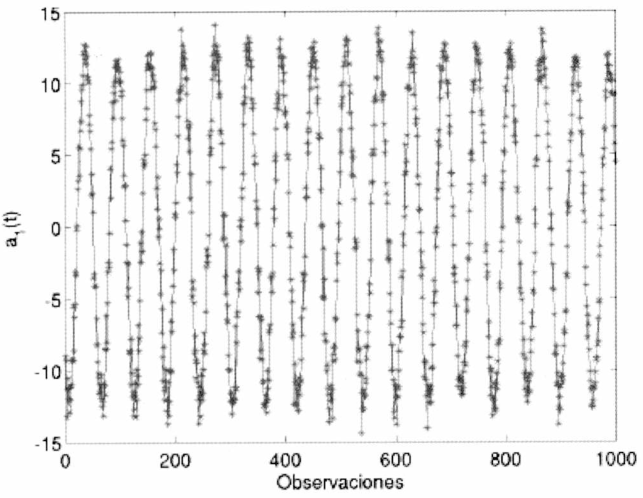


Figura c




## Conclusiones

Hemos desarrollado a lo largo de la sección, las bases de la técnica POD, una herramienta para el análisis y el modelado de escurrimientos. Permite reconocer estructuras coherentes de un flujo de acuerdo al contenido de energía cinética que contienen. El desarrollo del método se ha realizado desde un planteo dentro de la teoría de Espacios de Hilbert, a fin de conservar la mayor generalidad sobre los problemas que nos interesan. Vinculamos así el concepto de observación de un escurrimiento con el de poseer, en un instante, una solución de la ecuación de Navier Stokes, elemento de un espacio $L^2(W)$. Por último, la descripción del método sobre un contexto matricial, posibilita la implementación computacional y el trabajo con datos de observaciones que pueden provenir tanto de la simulación numérica como de la experimentación.

## Referencias bibliográficas

Holmes P. J., Lumley J. L. and Berkooz G., 1996, *Turbulence, coherent structures, symmetry and dynamical systems* (Cambridge, UK: Cambridge University Press).

Hussain A., 1983, *Coherent structures-reality and myth.*, Phys. Fluids 26, 2816.

Lumley J. L., 1967, *The structure of inhomogeneous turbulence, in Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (Yaglom, A. M. and Tatarski V. I., eds., Nauka, Moscow, ps. 166-178).

Lesieur M. and Metais O., 1993, *Turbulence and coherent vortices (In Computational Fluid Dynamics*, eds. Lesieur M., Comte P. and Zinn-Justin J., Elsevier, New York).

Gronskis A., 2009, *Modelos numéricos para el estudio de flujos externos controlados con actuadores EHD*, PhD Thesis, FIUBA ps. 1-293.