Lic. Silvia Ranieri

Licenciada en Matemática. Profesora de Matemática. Docente de UdeMM. silviaranieri@udemm.edu.ar

Problema de transporte

Resumen

En el presente trabajo se tratará el "Problema del transporte" que se encuadra dentro del área de la Investigación de operaciones (I.O.), que aspira a determinar el mejor curso de acción de un problema de decisión con la restricción de tener recursos limitados. El término I.O. está asociado a la aplicación de técnicas matemáticas para representar y analizar, por medio de modelos, problemas de decisión.
El Problema del transporte es una clase especial de programación lineal que tiene que ver con transportar artículos desde sus fuentes hasta sus destinos. El objetivo es determinar el programa de transporte que minimice el costo total y que al mismo tiempo satisfaga los límites de la oferta y de demanda. En el modelo se supone que el costo de transporte es proporcional a la cantidad de unidades transportadas en determinada ruta.
La importancia de resolver este tipo de problemas y de obtener la solución óptima radica en la toma de decisiones estratégicas para la vida de una empresa.

Introducción

El origen del modelo de transporte data del año de 1941, con anterioridad a la formulación del concepto de programación lineal, en el que F. L. Hitchcock presentó un estudio titulado "La distribución de un producto desde diversos orígenes a numerosas localidades" [2]. Se cree que esta investigación fue la primera contribución para la resolución de los problemas de transporte. En 1947, T. C. Koopmans presentó un estudio, sin ninguna relación con el de Hitchcock, al que llamó "Utilización óptima del sistema de transporte" [3]. Ambos aportes contribuyeron al desarrollo de los métodos de transporte.
Este tipo de problemas puede resolverse mediante el Método Simplex. Sin embargo, teniendo en cuenta la estructura especial del problema del transporte, pues la mayoría de los coeficientes son nulos, se han propuesto algunos métodos específicos de resolución que son más eficientes, basados en la forma matricial, representando el problema mediante una tabla de transporte. O sea, su estructura especial permite desarrollar un algoritmo de cómputo, basado en el Simplex, que usa la relación primal-dual para simplificar los cálculos.
Los métodos de resolución de este problema presentan una gran complejidad computacional y ofrecen un número grande de soluciones. Por ello es necesario buscar otro tipo de métodos de solución.
Un primer enfoque hacia los métodos está basado en la utilización de algoritmos matemáticos que permiten encontrar una solución óptima exacta.
Para lo cual primeramente se obtiene una solución y se analiza cómo encontrar la solución óptima de un problema de transporte a partir de ella.
En este trabajo se presentarán tanto las formas de encontrar una solución de inicio, como los métodos para la obtención de la solución óptima. El método que se analizará es el llamado Método modificado de distribución (MODI), también llamado Método de los multiplicadores.

En la actualidad, el modelo de transporte presenta una gran variedad de aplicaciones en los distintos ámbitos de la empresa que no tiene relación con el transporte. Sin embargo, se sigue hablando de este último.

Muchos problemas económicos que en principio no tienen nada que ver con el problema de transporte, mediante la utilización de algunas transformaciones, pueden ser convertidos en un problema de transporte y ser resueltos aplicando los métodos propios de este problema.

En la presentación de este trabajo originalmente se pensó en analizar la forma de resolver un problema de transporte. Al desarrollar y desear ampliar cada uno de los temas, de manera apropiada se fueron agregando conceptos impensados en un principio, ya que el problema de transporte tiene que ver con la optimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales, o sea, se basa en la Programación lineal. Entonces la meta fundamental pasó a ser interpretar dichos modelos, resolverlos y entender el aspecto matemático que liga estos conceptos. Primero se explica qué es la Programación lineal. Luego, una exposición del problema dual con sus propiedades. Y en base a todo esto se explica el problema de transporte y se deducirá su algoritmo.

1. Programación lineal

Ejemplo 1

Una agencia marítima desea analizar su desempeño comercial, haciendo hincapié en dos tipos de buques diferentes, considerando en esta oportunidad sÓlo buques petroleros y gaseros para abrir una nueva línea de negocios.

Para ese análisis se cuenta con las siguientes cifras presupuestadas como *utilidad*: para Buques Petroleros $ 30 mil, Buques Gaseros $ 15 mil por viaje concretado, Lo que se busca es hallar la cantidad de buques petroleros y la de buques gaseros que otorguen el máximo beneficio. Además se tienen en cuenta las siguientes restricciones: cuenta con 24 personas como máximo dedicadas a la operación de buques, de los cuales se podría afectar a petroleros 1 persona mientras que 3 podrían afectarse a la atención de gaseros.

Se interpreta que hay un total de 15 servicios de remises contratados para la atención de los buques petroleros. Los gaseros no utilizan dicho servicio.

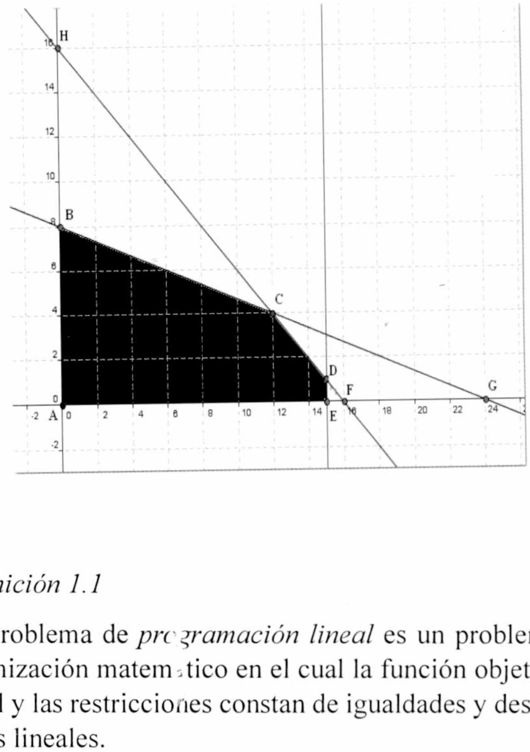
Respecto a la utilización de horas de comunicación vía Inmarsat se estima que en total hay disponibles 16 horas como máximo para los buques petroleros y los gaseros.

Si se toma a x_1 como la cantidad de buques petroleros, a x_2 como la cantidad de buques gaseros y a z como la utilidad, el problema puede plantearse de la siguiente manera:

$$\text{Max:} \quad z = 30x_1 + 15x_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Gráficamente:



Definición 1.1

Un problema de *programación lineal* es un problema de optimización matemático en el cual la función objetivo es lineal y las restricciones constan de igualdades y desigualdades lineales.

Como problema matemático se puede describir de la siguiente forma: sea un conjunto convexo definido por un conjunto lineal de restricciones, se desea determinar un subconjunto de puntos de ese conjunto para los cuales se optimice la función objetivo.

La forma exacta de estas restricciones puede variar de un problema a otro, pero cualquier programa lineal se puede convertir para llegar a la forma estándar que se dará más adelante.

En símbolos, un programa lineal a aquel que optimiza:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i . x_i$$

Sujeto a: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq b_j, j = 1,2,\ldots\ldots,m \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots\ldots,n \end{cases}$

donde las componentes a_{ji}, b_j y c_i son números reales.
La función lineal z es la función objetivo; las desigualdades son las restricciones y la condición de no negatividad, respectivamente.
La palabra optimizar puede significar ya sea maximizar o minimizar.
El programa lineal se escribe matricialmente de la siguiente manera:

Optimizar: $z = (c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Sujeto a: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.2. Forma canónica

Un problema de programación lineal escrito de la siguiente forma:

maximizar $z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

Sujeto a: $\begin{cases} \boldsymbol{A\ x \leq b} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$

se dice que está en la forma canónica.
Donde x es un vector con n componentes, se lo denomina el vector de actividades y sus n componentes son las variables de decisión x.

El vector c es el vector de costos unitarios, siendo $c^T = (c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)$; b, de m componentes, es el vector de disponibilidad de recursos; 0 es el vector nulo.
Y la matriz A de m filas y n columnas es la matriz de coeficientes.
Cada elemento a_{ij} en la matriz A, con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, representa la cantidad de recursos j que se necesita por unidad de la actividad i.

Definición 1.3. Forma estándar

Otra forma equivalente de la programación lineal es la estándar, con la adición de variables de holgura y superfluas (o de exceso), el problema puede escribirse de la siguiente manera:

maximizar $z = c^T x$

Sujeto a: $\begin{cases} \boldsymbol{A\ x = b} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$

Donde A es una matriz de m por n, b es de m por 1, x es de n por 1 y el rango de A es igual a m.
Si el rango de A es menor a m existen dos posibilidades:

1. El sistema es incompatible, es decir, no hay soluciones factibles del sistema $A\ x = b$.
2. El sistema es compatible y se puede eliminar filas de A, es decir, hay restricciones redundantes. Este proceso de eliminación lleva a una matriz A de rango máximo.

Definiciones 1.4

Solución factible (SF)
En la forma canónica es un vector x que satisface: $A\ x \leq b$ y $x \geq 0$.
En la forma estándar es un vector x que satisface: $A\ x = b$ y $x \geq 0$.

Región de factibilidad
Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

Solución factible básica (SFB)
Considerando la forma estándar $A\ x = b$ con rango $(A) = m < n$. Sea B una matriz formada por la elección de vectores linealmente independientes, de las n columnas de A. Siendo B una matriz no singular y si todas las $n - m$ variables no asociadas con estas columnas se fijan iguales

a cero, entonces la solución para el sistema de ecuaciones resultante se llama una solución básica factible. Se llama variables básicas a las m variables x_i asociadas a estas m columnas, las demás variables se llaman variables no básicas.

Si se toma x_B como las variables básicas y x_N como las variables no básicas. Para obtener una solución básica, fijamos $x_N = 0$.

Entonces $x_B = B^{-1}b$ y $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución básica.

Propiedades de la programación lineal

Si se considera S como el conjunto de todas las soluciones factibles, o sea:

$$S = \{x \mid A\,x = b, x \geq 0\}$$

1. Cada solución factible básica de un programa lineal corresponde a un punto extremo del conjunto convexo S de soluciones factibles.

2. Cada punto extremo del conjunto S tiene asociados m vectores linealmente independientes de la matriz de coeficientes A del programa y cualquier elección de m vectores linealmente independientes de A corresponde con un punto extremo de S.

De estas propiedades se desprende que aunque exista un número infinito de vectores x que son factibles, que son los puntos en el interior y en la frontera del convexo de factibilidad, sólo existe un número finito de puntos extremos. Y la solución óptima, si es que existe, se encuentra entre esos puntos extremos. Así que para obtener la solución de un programa lineal hay que ver qué valor toma la función objetivo en cada extremo y elegir la mejor. Si bien esta conclusión reduce la tarea, puede que haya una gran cantidad de puntos extremos para examinar, ya que si hay n actividades y m restricciones, puede haber aproximadamente:

$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-m)!.m!}$ puntos extremos, que pueden ser muchos.

El Dr. George Dantzig creó la teoría que justifica el juego de reglas de cambio que asegura el mejor incremento o reducción en el valor de la función objetivo en los casos de maximización o minimización respectivamente, sin analizar explícitamente el valor de la función objetivo en cada punto extremo. Dicho método es llamado "Método Simplex".

El problema de transporte es una variante del Método Simplex, por lo cual sería interesante presentar toda su teoría, aunque en el presente trabajo, por cuestiones de espacio, resulta imposible.

2. Dualidad

Se verá ahora el problema dual con sus propiedades, las cuales revelan cierta información sobre la solución óptima de un problema de programación lineal, que serán útiles en el transcurso de este trabajo, especialmente para justificar el procedimiento del algoritmo del transporte.

Para interpretar el concepto de dualidad, en primer lugar se dará un ejemplo.

Ejemplo 2 (El problema de la dieta)

¿Cómo puede un dietista diseñar la dieta más económica que satisface los requisitos básicos nutricionales diarios para una buena salud? Por simplicidad, se supone que hay sólo dos tipos de alimentos F_1 y F_2, y los distintos tipos de nutrientes que se requiere diariamente son: N_1, N_2 y N_3. El costo unitario de los alimentos y sus valores nutricionales junto con los requerimientos diarios de cada nutriente se dan en la siguiente tabla:

Cantidades de nutrientes que contiene cada tipo de alimento

	F_1	F_2	Requerimiento diario
Costo	*150*	*200*	
N_1	*2*	*1*	*19*
N_2	*1*	*3*	*18*
N_3	*1*	*1*	*12*

Si se toma x_j, $j = 1, 2$ como el número de unidades de F_j que uno debe comer con el fin de minimizar el costo y satisfaga el requisito de nutrición diaria. Así, el problema es seleccionar el x_j tal que: Min $x_0 = 150\,x_1 + 200\,x_2$ sujeto a las limitaciones nutricionales:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 19 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \end{cases}$$

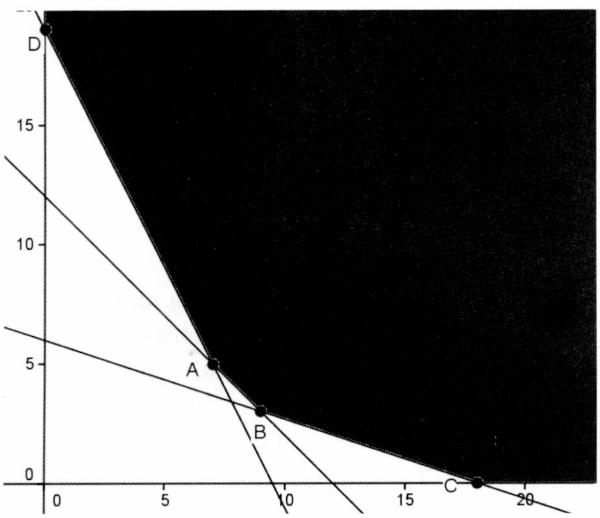
y las restricciones de no negatividad: $x_j \geq 0$, $j = 1, 2$

En forma matricial, se tiene: Min $x_0 = c^T x$

sujeto a: $\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$c = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente:



Ahora se verá el mismo problema desde el punto de vista de una compañía farmacéutica.
¿Cómo puede una compañía farmacéutica determinar el precio de cada unidad de pastilla de nutrientes para maximizar ingresos, si una dieta sintética compuesta de pastillas de nutrientes de los distintos nutrientes puros es adoptado? Así tienen tres tipos de píldoras de nutrientes P_1, P_2 y P_3. Se supone que cada unidad de P_i contiene una unidad del N_i. Sea u_i el precio unitario de P_i, el problema consiste en maximizar el ingreso total por la venta de una dieta sintética, es decir

$$\text{Max } u_0 = 19u_1 + 18u_2 + 12u_3$$

sujeto a las limitaciones de que el costo de una unidad de j alimento sintético compuesto de P_i no sea mayor que el precio de mercado de la unidad de F_j:

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 + u_3 \leq 150 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 \leq 200 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

En forma matricial, se puede escribir:

$$\text{Max } u_0 = b^T u$$

sujeto a: $\begin{cases} A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$

Los problemas de programación lineal presentados representan el primal y el dual que se definirán a continuación. Sus soluciones están relacionadas.

Definición de dualidad

El concepto de dualidad indica que para cada problema de programación lineal hay una asociación y una relación muy importante con otro problema de programación lineal, llamado precisamente dual.
En la siguiente tabla se considera el modelo lineal en forma canónica al que se denomina modelo primal y dual:

Primal	Dual
max $c^T x$	min $b^T u$
sujeto a: $\begin{cases} A x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$	sujeto a: $\begin{cases} A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$

Propiedades de dualidad

2.1: El dual del dual es el primal.

2.2: (dualidad débil) Si x es una solución factible, no necesariamente básica, del problema primal, y u es una solución factible, no necesariamente básica del dual, entonces:

$$c^T x \leq b^T u$$

Con esta propiedad se llega a la conclusión que todo valor que adquiera la función objetivo del primal será menor o igual que cualquiera del dual. (Siendo el primal un problema de maximización).

2.3: Si x_0 y u_0 son soluciones factibles del primal y del dual respectivamente y si $c^T x_0 = b^T u_0$ entonces x_0 y u_0 son soluciones óptimas del primal y del dual respectivamente. Esto indica que si se igualan las funciones objetivo en ambos problemas, ésta será la óptima.

2.4: Si existe una solución óptima x_0 del primal entonces hay una solución factible u_0 del dual tal que $c^T x_0 = b^T u_0$ entonces u_0 es solución óptima del dual.

2.5: (dualidad fuerte) Si el problema primal (P) y su dual (D) son factibles (o sea que existen soluciones factibles para ambos), entonces existe una solución optima del primal.

2.6: (holgura complementaria). Si x_0 es solución óptima del primal de un problema de programación lineal con x_{0s} las correspondientes variables de holgura y u_0 es solución óptima de su dual y u_{0s} las correspondientes variables superfluas del dual, entonces: $u_0^T u_{0s} = 0$ y $x_0^T u_{0s} = 0$.

2.7: Sea x, x_s una solución factible del primal y u, u_s una solución factible del dual.

Si $u^T x_s = 0 = x^T u_s$

Entonces x, x_s y u, u_s son soluciones óptimas para el primal y el dual respectivamente.

3. Planteamiento del problema de transporte

Los modelos de transporte tienen como objetivo encontrar la solución para obtener un costo mínimo en un plan de envíos, transporte o distribución, desde cualquier grupo de centros de abastecimiento llamados *orígenes* (o fuentes, o fábricas) hasta cualquier otro grupo de recepción llamados *destinos*. O sea, determinar la cantidad de productos que se deben enviar desde cada punto de origen a cada punto de destino, teniendo en cuenta las restricciones propias referidas a las capacidades o disponibilidades de los centros de abastecimiento y las demandas de los centros de destino, de manera tal que se minimice el costo total de transporte o distribución.

Los orígenes pueden ser fábricas, almacenes o cualquier punto desde el que se quiera enviar mercadería o productos. Los destinos son los lugares en donde se reciben dichos productos.

En los modelos se supone que el costo de transporte es proporcional a la cantidad de unidades transportadas en determinada ruta.

Los problemas de transporte tienden a requerir un número muy grande de restricciones y variables, de manera que una aplicación en computadora del método Simplex puede requerir un esfuerzo computacional exorbitante. Por suerte, una característica clave de estos problemas es que la mayor parte de los coeficientes en las restricciones son cero. Como resultado, se han podido desarrollar algoritmos simplificados especiales que logran grandes ahorros computacionales al explotar esta estructura especial del problema. Así, es importante familiarizarse bien con estos tipos especiales de problemas a fin de reconocerlos cuando surjan y aplicar el procedimiento adecuado para resolverlos.

Ejemplo 3

Una empresa tiene tres fábricas: A, B, y C, que pueden ofrecer hasta *15*, *25* y *10* unidades respectivamente y cuatro centros de distribución: 1, 2, 3 y 4 que deben recibir como mínimo *5*, *15*, *15* y *15* unidades respectivamente. Los costos unitarios de transporte c_{ij} se ven en la siguiente tabla de costos:

		Costo por unidad distribuida			
		Destino			
		1	2	3	4
Origen	A	*10*	*2*	*20*	*11*
	B	*12*	*7*	*9*	*20*
	C	*4*	*14*	*16*	*18*

El problema consiste en que se minimice el costo total de transporte o distribución desde cada una de las fábricas a cada uno de los cuatro destinos.

Dado por las siguientes desigualdades, siendo x_{ij} la cantidad que se envía del origen i al destino j, el problema consiste en:

$$\text{Minimizar} = 10\,x_{11} + 2\,x_{12} + 20\,x_{13} + 11\,x_{14} + 12\,x_{21} + 7\,x_{22} + 9\,x_{23} + 20\,x_{24} + 4\,x_{31} + 14\,x_{32} + 16\,x_{33} + 18\,x_{34}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 15\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 25\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \le 10\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31} \ge 5\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32} \ge 15\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33} \ge 15\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34} \ge 15\\
&x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4.
\end{aligned}$$

3.1. Definición del modelo de transporte

En un problema general de transporte hay m fuentes y n destinos, cada origen y cada destino se representan por un nodo. Los arcos representan las rutas que enlazan fuentes y destinos.

El arco (i, j) que une a la fuente i con el destino j brinda dos tipos de información: el costo de transporte c_{ij} y la cantidad transportada x_{ij}. La cantidad de oferta en la fuente i es s_i y la cantidad de demanda en el destino j es d_j. El objetivo del modelo es determinar el valor de las incógnitas x_{ij} que minimicen el costo total de transporte y que, por supuesto, satisfagan las restricciones de oferta y demanda.

Suposición de costo: el costo de distribuir unidades de un origen a un destino dados es directamente proporcional al número de unidades distribuidas. Por lo tanto, este costo es justo el costo unitario de distribución multiplicado por el número de unidades distribuidas.
Los únicos datos necesarios para un modelo de transporte son suministros, demandas y costos unitarios. Éstos son los parámetros del modelo. Todos estos parámetros se pueden resumir de manera conveniente en una tabla de parámetros.

3.2. Modelo de programación lineal

Si x_{ij} representa la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, y c_{ij} el costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j, entonces, en programación lineal el modelo de transporte es el siguiente:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i & 1 \le i \le m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & 1 \le j \le n \\ x_{ij} \ge 0 \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \end{cases}$$

La primera restricción asegura que todo el flujo del producto que emana del origen i y que se envía a todos los posibles destinos m, no puede exceder a la oferta del origen i que es s_i. Esa restricción existe para cada origen.
La segunda restricción indica que todo el flujo del producto que llega al centro de consumo j de todos los posibles orígenes n debe satisfacer la demanda del centro de consumo d_j. Al igual que en el caso anterior dicha restricción existe para cada centro de demanda.

Las restricciones de no negatividad indican que el sentido del flujo del producto es sólo de los orígenes a los destinos. En algunos problemas reales, los suministros representan cantidades máximas (y no cantidades fijas) que deben distribuirse. En forma parecida, en otros casos, las demandas representan cantidades mínimas (y no fijas) que deben recibirse. Tales problemas no se ajustan por completo al problema de transporte porque violan la suposición de requerimientos. Sin embargo, es posible reformular el problema de manera que se ajuste al modelo con la introducción de un destino ficticio o un origen ficticio para que se haga cargo de la holgura entre las cantidades reales distribuidas y las máximas.
El algoritmo del transporte se basa en la hipótesis de que el problema está balanceado, o sea que la demanda total es igual a la oferta total:
Si el modelo está desbalanceado se podrá aumentar con una fuente u origen ficticio para restaurar el equilibrio.
Con la adición de variables de holgura y superfluas (o de exceso), el problema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} \ge 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

(4.2)

$$\text{Donde} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

A esta formulación lineal se la llama forma estándar de la estructura de transporte (PT).
No se debe confundir la forma estándar de la estructura de transporte con la forma estándar del método Simplex, ya que en este último la matriz A es de rango máximo y en el problema de transporte no lo es. Se ve que hay mn variables pero sólo $m + n$ ecuaciones. Se podría resolver ese problema por el método Simplex, sin embargo el PT posee algunas propiedades que simplifican aún más la solución.

3.3. Dual del problema de transporte

De acuerdo a lo planteado en la tabla 3.1, el dual del PT está dado por:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij} & (i = 1,2,\ldots,m \;;\; j = 1,2,\ldots,n) \\ u_i, v_j & \textit{libres} \end{cases}$$

3.4. Conceptos preliminares para la obtención del algoritmo del transporte

El problema de transporte puede escribirse en forma abreviada como:

$$\text{Min } z = c^T x$$

$$\text{Sujeto a} \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Donde la estructura de las componentes es:

$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})^T$

$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})^T$

$b = (s_1, s_2, \ldots, s_n, d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$

Y la matriz A es de la forma:

$$A_{(m+n)(m.n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \ldots & & & \ddots & \ldots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Teoremas

1. El rango de la matriz A es igual a $m + n - 1$.
2. Todo menor de A sólo puede tener los valores 1, -1 o 0. Más precisamente, dado cualquier A_k, submatriz de A de tamaño k por k, se tiene det $(A_k) = \pm 1$ o 0.
3. Cualquier problema de transporte equilibrado tiene solución óptima.
4. Teorema de *Stepping Stones*:

Sea $B = \left\{ a_{\alpha\beta} \right\}$ un conjunto de $m + n - 1$ columnas linealmente independientes de A. Entonces, para todo vector columna de a_{ij} de A, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ se tiene:

$$\boldsymbol{a}_{ij} = \boldsymbol{a}_{ii_1} - \boldsymbol{a}_{i_2 i_1} + \boldsymbol{a}_{i_2 i_3} - \boldsymbol{a}_{i_4 i_3} + \ldots + (-1)^k \boldsymbol{a}_{i_k j}$$

donde $\boldsymbol{a}_{ii_1}, \boldsymbol{a}_{i_l i_{l+1}}, \boldsymbol{a}_{i_{l+1} i_l}, \boldsymbol{a}_{i_k j}$

están en B para $l = 1, \ldots, k-1$

Además, esta expresión es única.

En el cuadro de transporte, las variables no básicas no se escriben explícitamente.

En el ejemplo:

		destinos				
		D1	D2	D3	D4	Oferta
ORIGEN	OA	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
	OB	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
	OC	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	10
Demanda		5	15	15	15	

Total de oferta = Total de demanda = 50

O sea: el bucle comienza con una variable no básica, pasa a través de una secuencia de variables básicas (*Stepping Stones*) y finalmente se vuelve a la variable no básica de partida.

3.6. Determinación de la solución básica factible de inicio

De acuerdo a todo lo visto se sabe que todo problema de transporte equilibrado tiene solución.

Se puede obtener una solución básica factible (SBF) para un problema de transporte balanceado mediante diversos métodos, de los cuales sólo mencionaremos los siguientes:

1. Método de la esquina Noroeste (MEN).
2. Método de costo mínimo (CM).
3. Método de Vogel (MAV)

3.7. Método de la esquina Noroeste

La mecánica de este método sigue los siguientes pasos:

1. Se asigna en primer lugar la casilla más noroeste, o sea, la superior izquierda, con la máxima cantidad posible.
2. Cuando no quede satisfecha la oferta de la primera fila, se pasa a la casilla siguiente derecha de la misma fila y así sucesivamente hasta que el primer centro productor (origen) agote su capacidad, tratando de completar la demanda de cada destino
3. Se repite la operación con la siguiente casilla más noroeste, que será la situada a la izquierda de la segunda fila, y así se completan todas las asignaciones posibles.

La siguiente tabla muestra la aplicación del *Método de la esquina Noroeste* aplicado en el Ejemplo 3:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
OA	*10* / *5*	*2* / *10*	*20*	*11*	*0*
OB	*12*	*7* / *5*	*9* / *15*	*20* / *5*	*0*
OC	*4*	*14*	*16*	*18* / ***10***	***10-10=0***
Demanda	*0*	*0*	*0*	***10-10=0***	

Con un costo total de:
$z = 5(10) + 10(2) + 5(7) + 15(9) + 5(20) + 10(18) = 520.$

3.8. Método de costo mínimo

Este método asigna lo más posible a la celda de menor costo. El procedimiento es el siguiente:
Se asigna el valor más grande posible a la variable con menor costo unitario de toda la tabla. (Los empates se rompen arbitrariamente). Se tacha la fila o columna satisfecha. (Como en el método de la esquina noroeste, si una columna y una fila se satisfacen de manera simultánea, sólo una puede tacharse). Después de ajustar la oferta y la demanda de todas las filas y columnas no tachadas, se repite el proceso asignando el valor más grande posible a la variable con el costo unitario no tachado más pequeño. El procedimiento está completo cuando queda exactamente una fila o una columna sin tachar.
La siguiente tabla muestra la solución del ejemplo 3 planteado por el *Método de Costo mínimo*:

	D1	D2	D3	D4	Oferta
OA	*10*	*2* / *15*	*20*	*11*	*0*
OB	*12*	*7*	*9* / *15*	*20* / ***10***	***10-10=0***
OC	*4* / *5*	*14*	*16*	*18* / *5*	***5-5=0***
Demanda	*0*	*0*	*0*	***15-15=0***	

Con un costo total de $z = 15(2) + 5(4) + 15(9) + 5(18) + 10(20) = 475.$

3.9. Método de aproximación de Vogel

Este método permite obtener una muy buena solución inicial ya que considera las magnitudes de los coeficientes de costo c_{ij} mediante los cálculos de las llamadas penalizaciones de fila y columna, los cuales representan el posible costo de penalización que se obtendría por no asignar unidades a una determinada ubicación.
Los pasos del procedimiento son los siguientes:

Paso 1: Determinar para cada fila (o columna) una medida de penalización restando el elemento de costo unitario menor en la fila (o columna) del elemento con costo unitario siguiente al mínimo de la misma fila (o columna).

Paso 2: Identificar la fila o columna con la mayor penalización, rompiendo empates en forma arbitraria. Asignar el valor mayor posible a la variable con el costo más bajo de la fila o columna seleccionada. Ajustar la oferta y la demanda y tachar la fila o columna satisfecha. Si una fila o columna se satisfacen al mismo tiempo, solo uno de ellos se tacha y a la fila restante se le asigna una oferta cero. Cualquier fila o columna con oferta o demanda cero no debe utilizarse para calcular penalizaciones futuras.

Paso 3: *a.* si sólo hay una fila o columna sin tachar, detenerse.
b. si sólo hay una fila con oferta positiva sin tachar, habrá que determinar las variables básicas de la fila a través del método del costo mínimo.
c. si todos los renglones y columnas sin tachar tienen oferta o demanda cero asignadas, hay que determinar las variables básicas cero a través del método del costo mínimo.
d. de lo contrario, calcular las penalizaciones de los renglones y columnas no tachados y dirigirse al paso 2.

3.10. Resolución por el Método de aproximación de Vogel

		DESTINOS D1	D2	D3	D4	Penalización de fila
ORIGEN	OA	*10*	*2*	*20*	*11*	*10 – 2 = 8*
	OB	*12*	*7*	*9*	*20*	*9 – 7 = 2*
	OC	*4*	*14*	*16*	*18*	*14 – 4 = **10***
Penalización de columna		*10- 4 = 6*	*7- 2 = 5*	*16-9 = 7*	*18 - 11 = 7*	

Como se ve, la fila 3 tiene la máxima penalización: *10*.
La celda (3,1) tiene el menor costo unitario en esa fila: $c_{31} = 4$.
Se asigna la mayor cantidad posible. Como la demanda es 5, se asigna este valor a x_{31} y se tacha la columna 1.
Se vuelven a calcular las penalizaciones:

	D2	D3	D4		Penalización de fila
O OA R	*2*	*20*	*11*	*15*	*11 – 2 = 9*
I OB G	*7*	*9*	*20*	*25*	*9 – 7 = 2*
E OC N	*14*	*16*	*18*	*5*	*16 – 14 = 2*
	15	*15*	*15*		
Penalización de columna	*7-2 = 5*	*16- 9 = 7*	*18- 11 = 7*		

Ahora la mayor penalización la tiene la fila 1: *11-2 = 9*
En dicha fila el menor costo es $c_{12} = 2$.
La máxima asignación que puede darse es *15*, con lo cual se toma $x_{12} = 15$. Como se satisface la oferta y demanda a la vez, se elige al azar la columna 2 y se tacha:
Se calculan las nuevas penalizaciones:

		D3	D4		Penalización de fila
O R	OA	*20*	*11*	*0*	*20 – 11 = 9*
I G	OB	*9*	*20*	*25*	*20 – 9 = 11*
E N	OC	*16*	*18*	*5*	*18 – 16 = 2*
		15	*15*		
Penalización de columna		*16-9 = 7*	*18-11 = 7*		

La fila 2 produce la máxima penalización: *20 – 9 = 11*.
El menor costo en esa fila es $c_{23} = 9$.
Se asigna el mayor valor que es *15*, por lo tanto se toma $x_{23} = 15$.
Por lo cual se tacha la columna *3*, quedando

		D4	
O R	OA	*11*	*0*
I G	OB	*20*	*10*
E N	OC	*18*	*5*

El problema por este método llegó a su fin, ya que se asigna a x_{24} el valor *10* y a $x_{34} = 5$.
La solución entonces de inicio está dada por su valor objetivo asociado:

$Z = 15(2) + 15(9) + 10(20) + 5(4) + 5(18) = 475.$

Una vez terminado el proceso, la pregunta es si el presentado es el resultado óptimo. Esa respuesta se obtendrá cuando se vean los métodos de optimización.

3.11. Método de *Stepping Stones*

Después de haber encontrado la SBF de partida, se tendrá que determinar si se está parado en un óptimo y, de lo contrario, determinar cuál variable entra y cuál sale.

Ejemplo:

La siguiente tabla muestra la solución básica factible inicial del problema planteado en el ejemplo 3 obtenida con el método de la esquina noroeste.

	D1	D2	D3	D4	Oferta
OA	*10* / **5**	*2* / ***10***	*20*	*11*	*15*
OB	*12*	*7* / **5**	*9* / ***15***	*20* / **5**	*25*
OC	*4*	*14*	*16*	*18* / ***10***	*10*
Demanda	*5*	*15*	*15*	*15*	

Esta solución tiene un costo total igual a *520*.
La idea es ver si puede mejorarse esta solución, sacando una variable básica e introducir una no básica.
Con lo cual se debe elegir otra casilla, por ejemplo se asigna $\partial > 0$ a x_{14}.

	D1	D2	D3	D4	Oferta
OA	(10) 5	(2) $10-\delta$	(20)	(11) $\delta > 0$	15
OB	(12)	(7) $5+\delta$	(9) 15	(20) $5-\delta$	25
OC	(4)	(14)	(16)	(18) 10	10
Demanda	5	15	15	15	

En este caso se tomará el valor de ∂ igual a *5*.
Con un costo total de $z = 5(10)+5(2)+5(11)+10(7)+$ $+\ 15(9)+10(18)= 500$ que mejora la solución anterior.
Y además: $z_{14} - c_{14} = 20 - 7 + 2 - 11 = 4 > 0$
Ahora, a partir de esta solución básica, se sigue viendo de la misma forma si puede mejorarse. Se elige la casilla x_{31}.

	D1	D2	D3	D4	Oferta
OA	(10) $5-\delta$	(2) 5	(20)	(11) $5+\delta$	15
OB	(12)	(7) 10	(9) 15	(20)	25
OC	(4) δ	(14)	(16)	(18) $10-\delta$	10
Demanda	5	15	15	15	

Por lo tanto se tomará el valor de ∂ igual a *5*.
Con un costo total de $z = 5(2)+10(11)+10(7)+15(9)+$ $+5(4)+5(18)= 435$ que mejora la solución anterior.
Se continúa con el procedimiento y se ve que ya no se encuentra una solución mejor.

3.12. Método de los Multiplicadores (MODI)

Este es otro método para evaluar $z_{ij} - c_{ij}$. La idea es utilizar las variables duales. Se recuerda que el dual está dado por:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$\text{Sujeto a:} \begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots,m\ ;\ j = 1,2,\ldots,n) \\ u_i, v_j \quad \text{libres} \end{cases}$$

En el método de los multiplicadores, se escribe, para cada variable básica $x^B_{ij} > 0$:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Esto se desprende del teorema de holgura complementaria (3.5), es decir, si la variable de la estructura primal es positiva, entonces la variable de holgura dual debe ser cero. Luego:

$$z_{ij} - c_{ij} = \left(c_{ii_1} - c_{i_2 i_1} + c_{i_2 i_3} - \ldots + c_{i_k j} \right) - c_{ij}$$

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_{i_1} - \left(u_{i_2} + v_{i_1} \right) + \ldots + \left(u_{i_k} + v_j \right) - c_{ij}$$

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

Hay $m + n - 1$ variables básicas, y $m + n - 1$ ecuaciones. Sin embargo hay $m + n$ incógnitas u_i y v_i (m variables u_i y n variables v_j) y sólo $m + n - 1$ ecuaciones $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ con lo cual existe un grado de libertad. Así, se puede asignar un valor arbitrario a cualquiera de las variables duales u_i o v_i, quedando entonces por resolver un sistema de $m + n - 1$ ecuaciones con $m + n - 1$ incógnitas y así se obtienen todas las otras incógnitas. Una vez que todos los u_i y v_j han sido determinados, $z_{ij} - c_{ij}$ podrán ser evaluados. En el ejemplo presentado, la determinación de la variable de entrada, entre las variables no básicas actuales, se hace calculando los coeficientes no básicos en la fila z con el *método de los multiplicadores*.
Hay 7 variables y 6 ecuaciones que corresponden a las 6 variables básicas. Para resolver esas ecuaciones con el método de los multiplicadores se necesita igualar en forma arbitraria algún u_i a un valor cualquiera, por ejemplo se toma $u_i = 0$, se despejan y resuelven las variables restantes de la siguiente manera:

Variable básica	Ecuación (u, v)	Solución
x_{11}	$u_1 + v_1 = 10$	$u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 10$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 2$	$u_1 = 0 \rightarrow v_2 = 2$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 7$	$v_2 = 2 \rightarrow u_2 = 5$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 9$	$u_2 = 5 \rightarrow v_3 = 4$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 20$	$u_2 = 5 \rightarrow v_4 = 15$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 18$	$v_4 = 15 \rightarrow u_3 = 3$

Entonces se tiene:
$u_1 = 0,\ u_2 = 5,\ u_3 = 3$
$v_1 = 10,\ v_2 = 2,\ v_3 = 4,\ v_4 = 15$
Luego se usan u_i y v_j para evaluar las variables no básicas, calculando:
$u_i + v_j - c_{ij}$ para cada x_{ij} no básica.

Estos resultados se muestran a continuación:

Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16$
x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4$
x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3$
x_{31}	$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = 9$
x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9$
x_{33}	$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9$

Se puede armar la siguiente tabla teniendo en cuenta que para todas las variables básicas se cumple que $u_i + v_j - c_{ij} = 0$.

Variable	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
z	0	0	-16	4	3	0	0	0	9	-9	-9	0

Como lo que se busca es minimizar el costo, la variable de entrada es la que tiene el valor mayor de la fila z.
O sea x_{31} es la variable de entrada.
Este procedimiento puede hacerse directamente sobre la tabla de transporte. Por lo tanto no es necesario escribir las ecuaciones de (u, v) en forma explícita:
Se comienza tomando $u_1 = 0$, con lo cual se pueden calcular los valores de v para todas las columnas que tengan variables básicas en la primera fila, o sea v_1 y v_2.
Luego se calcula u_2 con base en la ecuación (u, v) de x_{22} básica.
Teniendo ya u_2 se puede calcular v_3 y v_4.
Se determina entonces u_3 usando la ecuación básica de x_{34}.
Ya con todas las u y v determinadas se pueden evaluar las variables no básicas, calculando $u_i + v_j - c_{ij}$ para cada x_{ij} no básica.
Todo este procedimiento se ve en la siguiente tabla, considerando las evaluaciones previas en cursiva:

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{20}$ *-16*	$\boxed{11}$ *4*	15
$u_2 = 5$	$\boxed{12}$ *3*	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 5	25
$u_3 = 3$	$\boxed{4}$ *9*	$\boxed{14}$ *-9*	$\boxed{16}$ *-9*	$\boxed{18}$ 10	10
Demanda	5	15	15	15	

Se determina x_{31} como la variable de entrada, esto significa que transportando por esta ruta se reduce el costo de transporte.

¿Cuál es el máximo que se puede transportar por esa ruta? Si llamamos ∂ a la cantidad que transporta la ruta (3,1), el valor máximo que puede tomar ∂ se determina en base a las siguientes condiciones:

1. Los límites de oferta y lo que requiere la demanda quedan satisfechos.
2. Los transportes en todas las rutas no pueden ser negativos.

Estas condiciones determinan el valor máximo de ∂ y ahora se debe determinar la variable de salida.
Para tal fin se forma un circuito cerrado que comienza y termina en la celda de la variable de entrada, o sea x_{31}.
Cada esquina del ciclo debe coincidir con una variable básica, excepto la variable de entrada.
Se asigna la cantidad ∂ a la celda de la variable de entrada x_{31} ccomo se ve en la tabla:

$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
$5 - \delta$	$10 + \delta$			$u_1 = 0$
	$5 - \delta$		$5 + \delta$	$u_2 = 5$
δ			$10 - \delta$	$u_3 = 3$

Para que se sigan satisfaciendo los límites de oferta y demanda, se alterna entre sumar y restar la cantidad ∂ en las esquinas del ciclo, se puede recorrer el circuito en sentido positivo o negativo indistintamente.
Para que los valores de las variables sigan siendo positivos, se debe cumplir:

$$x_{11} = 5 - \partial \geq 0 \qquad x_{22} = 5 - \partial \geq 0 \qquad x_{34} = 10 - \partial \geq 0$$

Por lo tanto el valor máximo de ∂ es 5, que se presenta cuando tanto x_{11} *o* x_{22} son iguales a cero.
Como puede elegirse en forma arbitraria cualquiera de las dos, se elige x_{11} como variable de salida.
La elección de x_{11} como variable de salida y x_{31} como la de entrada, modifica la tabla de la siguiente manera:

$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
0	15			$u_1 = 0$
	0		10	$u_2 = 5$
5			5	$u_3 = 3$

Como cada unidad que se envía por la ruta (3,1) reduce el costo de transporte en: $u_3 + v_1 - c_{31} = 9$. El costo total se reduce 9(5) = 45

Por lo tanto el nuevo costo es $520 - 45 = 475$

$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
	$15 - \delta$		δ	$u_1 = 0$
	$0 + \delta$	15	$10 - \delta$	$u_2 = 5$
5			5	$u_3 = 3$

En la nueva tabla se repite el cálculo de los multiplicadores u y v.
La variable de entrada es x_{14}.
El ciclo cerrado dice que x_{14} es igual a 10 y que la variable de salida es x_{24}.
En la siguiente tabla se ve la nueva solución, el costo se reduce en: $4(10) = 40$

$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	
	5		10	$u_1 = 0$
	10	15		$u_2 = 5$
5			5	$u_3 = 7$

Por lo tanto el nuevo costo es: $475 - 40 = 435$

$$u_1 + v_1 - c_{11} = -9 \qquad u_2 + v_1 - c_{21} = -6$$
$$u_1 + v_3 - c_{13} = -16 \qquad u_3 + v_2 - c_{32} = -9$$
$$u_2 + v_1 - c_{21} = -6 \qquad u_3 + v_3 - c_{33} = -9$$

los nuevos $u_i + v_j - c_{ij}$ son negativos para todo i, j, o sea para todas las variables x_{ij} no básicas.
Por lo tanto el costo total obtenido es el menor y se llega de esta manera a la solución óptima:

Origen	Destino	Solución
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5

Costo total óptimo (mínimo) = 435

A modo de cierre

Si bien en un principio la idea era presentar fundamentalmente el problema del transporte y los distintos métodos para resolverlo, la forma de resolverlo y su fundamento llevó a ir mucho más lejos. El trabajo original completo tiene 100 páginas, donde se presenta toda la teoría de programación lineal y dualidad, con los conceptos previos de Álgebra y Topología. En el presente se hizo una muy breve síntesis del mismo.

Referencias

Hillier, F., Lieberman, G., *Investigacion de operaciones.* (7ª edición). Ed. Mc Graw-Hill. México. (2003).

Hitchcock, F. L., *The distribution of a product from several sources to numerous localities*, Journal of Mathematical Physics, vol 20, ps. 224-230. (1941).

Koopmans, T. C. (1949). *Optimum Utilization of the Transportation System. Proceedings of the International Statistical Conferences*, Vol. 5, ps. 136-145. Washington, (1951).

Prawda, Juan, *Métodos y modelos de la investigacion de operaciones*. Vol. 1.: Ed. Limusa S.A. Grupo Noriega Editores. México. (2000).

Shamblin, James E., Stevens G. T., *Investigacion de operaciones* (7ª edición). Ed. Mc Graw-Hill. Colombia. (2004).

Soret los Santos, Ignacio, *Logística comercial y empresarial* (2ª edición). ESIC Editorial (Escuela Superior de Gestión Comercial y Marketing). Madrid. (1997).