



José Manuel Pereiras

Ingeniero Civil (UBA). Magister en simulación numérica y control (UBA). Docente Fac. de Ingeniería UdeMM.

Desarrollo de un modelo estocástico mediante la utilización del método de los elementos finitos y redes neuronales

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo estocástico mediante elementos finitos y redes neuronales con aplicaciones en la mecánica del sólido.

El objetivo de este informe es mostrar un nuevo procedimiento de cálculo de cualquier tipo de estructura. Este procedimiento puede dividirse en cuatro etapas:

- Etapa 1: Generación de los patrones de excitación o acciones que actúan sobre la estructura (realizaciones).
- Etapa 2: Cálculo de las reacciones mediante elementos finitos, para cada una de las acciones.
- Etapa 3: Entrenamiento de la red neuronal en base a los resultados obtenidos con elementos finitos.
- Etapa 4: Utilización de la red para predecir las reacciones de la estructura ante nuevos patrones de carga.

Introducción

Hoy día se están dando nuevos y significativos pasos en la aplicación de metodologías de diseño basadas en la confiabilidad, mediante su integración con el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), para dar lugar al denominado Método de los Elementos Finitos Estocástico.

Los métodos clásicos de evaluación no permitían utilizar funciones de "performance" o de estado límite implícitas y no podían representar acabadamente las particularidades del comportamiento de sistemas complejos, en tanto que la formulación convencional del M.E.F no incluye las incertidumbres en los datos. Entonces, el S.F.E.M. (Stochastic Finite Element Method) aparece como una valiosa alternativa para los ingenieros de diseño, quienes podrán sacar provecho de las ventajas de cada uno, eliminando las deficiencias individuales.

Si a lo anteriormente descrito le sumamos el empleo de una herramien-

ta como el de las redes neuronales, tendremos la posibilidad de emplear un conjunto de "herramientas de cálculo" que nos proporcione un resultado confiable en el análisis y diseño de problemas de ingeniería.

El objetivo de este informe es mostrar un nuevo procedimiento de cálculo de cualquier tipo de estructura. Este procedimiento puede dividirse en cuatro etapas:

- Etapa 1: Generación de los patrones de excitación o acciones que actúan sobre la estructura (realizaciones).
- Etapa 2: Cálculo de las reacciones mediante elementos finitos, para cada una de las acciones.
- Etapa 3: Entrenamiento de la red neuronal en base a los resultados obtenidos con elementos finitos.
- Etapa 4: Utilización de la red para predecir las reacciones de la estructura ante nuevos patrones de carga.

2. Desarrollo teórico

2.1 Elementos Finitos Estocásticos

Una segunda área de aplicación de redes neuronales en combinación con la simulación Monte Carlo es el análisis de problemas mecánicos con materiales inhomogéneos que responden a una distribución gaussiana.

La posibilidad de tratar datos inciertos caracterizados estadísticamente para basar el diseño en el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla asociada, en problemas estacionarios y no estacionarios, lineales y no lineales de las múltiples disciplinas de la ingeniería, abre una nueva perspectiva para el tratamiento más racional de una realidad que – por cierto – esta muy lejos de poder ser caracterizada en forma determinística.

Se analizará el comportamiento estructural de un tanque cilíndrico (modelo) mediante el uso de los elementos finitos. En este análisis numérico se obtendrán los desplazamientos nodales de la malla de elementos finitos para un dado valor de módulo de elasticidad del material de los elementos de nuestro modelo.

Luego, mediante la simulación Monte Carlo se realizará un análisis de valores de módulos de elasticidad del material empleado en nuestro modelo con distribución gaussiana para distintas medias estadísticas.

2.2 Redes Neuronales

Las redes neuronales son herramientas del campo de la inteligencia artificial que permite generar modelos, a través de algoritmos de aprendizaje, para predecir y analizar posterior-

mente distintos fenómenos. Muchas tareas de clasificación y transformación son enfocadas con un análisis estadístico inicial de los datos de entrada y de los resultados.

Estos tipos de análisis son adecuados para intentar descubrir una o más ecuaciones “estáticas” o fórmulas que permitan a los problemas de ingeniería ser transformados en “resultados”. Sin embargo, las soluciones “dinámicas” que incluyen procesos matemáticos, son muchos más apropiadas para muchas tareas de análisis, que las soluciones “estáticas”. Afortunadamente, las Redes Neuronales son capaces de particionar los problemas y descubrir soluciones con componentes “estáticos” y “dinámicos”.

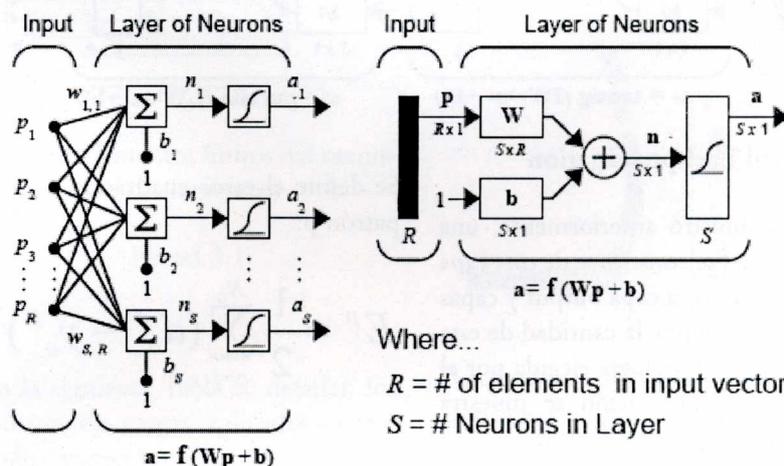
De este modo las redes neuronales se convierten en una poderosa herramienta que supera a otras conocidas ya que se puede entrenar para funciones muy variadas.

El paso siguiente es mediante el empleo de una red neuronal, Backpropagation, (esta red fue empleada por Jorge E. Hurtado, “Neural network in stochastic mechanics”, Archives of Computational Methods in Engineering (State of the art reviews), Vol. 8,

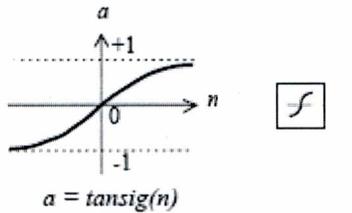
3, 303-342 (2001)), entrenarlas con valores de módulo de elasticidad para cada uno de los elementos de la malla (inputs de la red) y con valores de desplazamiento para cada uno de los nodos de la malla (outputs de la red). Se tomarán los valores estadísticos de módulo de elasticidad y de desplazamiento que fueron calculados previamente para entrenar las redes.

Una vez realizado el entrenamiento de las redes, mediante el empleo de las mismas, y haciendo variar en forma random el módulo de elasticidad de cada uno de los elementos, se puede simular el empleo de la red para obtener los valores de desplazamiento para cada uno de los nodos y de esta manera verificar la exactitud de los mismos. Se podrá demostrar que el uso de las redes neuronales como herramienta de cálculo implica que se reducen los tiempos de cálculo si lo comparamos con los tiempos de elementos finitos para el uso de mallas de varios miles de nodos.

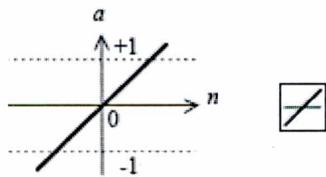
En la siguiente figura se muestra un esquema de la red neuronal backpropagation de una sola capa (single layer).



La red neuronal tiene por lo tanto R inputs, S neuronas y "a" es la salida de la red.



Tan-Sigmoid Transfer Function



Linear Transfer Function

En la figura que se muestra a continuación se representa una red con dos capas de neuronas (existen redes multicapas), donde "tansig" y "purelin" son las funciones de transferencia "Tan-sigmoid" y "Linear".

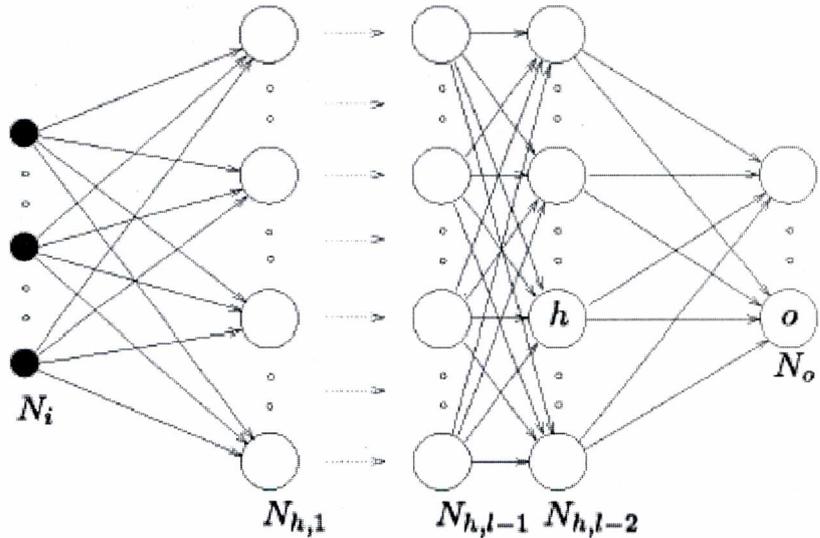


Figura: Res Neuronal Multicapa

La red descrita en la figura posee N inputs. Definimos la función de activación como:

$$Y_k^p = F(S_k^p)$$

$$S_k^p = \sum_j w_{jk} \cdot y_j^p + \theta_k$$

Donde d_o^p es el output deseado por la neurona "o" cuando el patrón "p" es introducido.

El funcionamiento de una red backpropagation puede resumirse en los siguientes tres pasos:

1. El peso de una conexión es ajustado mediante una cantidad proporcional al producto de una señal de error δ :

$$\Delta w_{jk} = \gamma \cdot \delta_k^p \cdot y_j^p$$

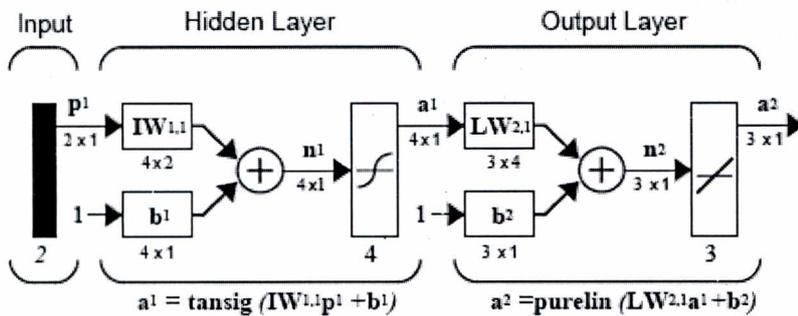
2. Si la neurona es una neurona de output, la señal de error está dada por:

$$\delta_o^p = (d_o^p - y_o^p) \cdot F'(S_o^p)$$

Tomando ahora como función de activación la siguiente función sigmoidea:

$$y^p = F'(S^p) = \frac{1}{1 + e^{-S^p}}$$

Siendo la derivada:



2.2.1 Red Backpropagation

Como se mostró anteriormente, una red neuronal se constituye de una capa (layer) input, otra capa output y capas intermedias, donde la cantidad de esta varía según la topología elegida por el usuario. A continuación se muestra una red multicapa con l capas.

Se define el error cuadrático para el patrón p:

$$E^p = \frac{1}{2} \cdot \sum_{o=1}^{N_o} (d_o^p - y_o^p)^2$$

$$F'(s^p) = \frac{\partial}{\partial s^p} \left(\frac{1}{1 + e^{-s^p}} \right) = y^p(1 - y^p)$$

Entonces la señal de error puede escribirse como:

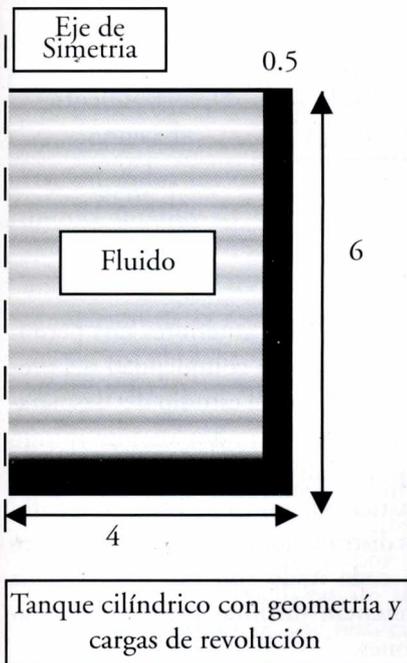
$$\delta_o^p = (d_o^p - y_o^p) \cdot y_o^p \cdot (1 - y_o^p)$$

3. La señal de error para una neurona oculta es determinada recursivamente en términos de la señal de error a la cual está directamente conectada y a los pesos de esas conexiones. Para la función sigmoidea elegida queda:

$$\delta_h^p = F'(S_o^p) \cdot \sum_{o=1}^{N_o} \delta_o^p \cdot w_{ho} = y_h^p \cdot (1 - y_h^p) \cdot \sum_{o=1}^{N_o} \delta_o^p \cdot w_{ho}$$

3 Aplicación numérica

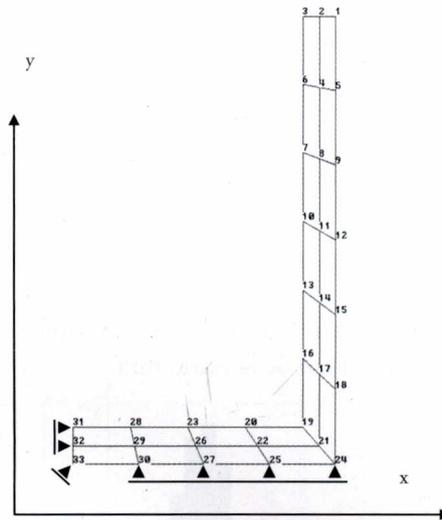
Con el objeto de aplicar las implementaciones numéricas anteriormente desarrolladas, se modeló un tanque cilíndrico con geometría y cargas de revolución. En la siguiente Figura se muestra un esquema del recipiente.



Las cargas producidas por la presión del líquido fueron aplicadas como fuerzas concentradas equivalentes en los nodos de la malla de elementos finitos.

3.1 Elementos finitos

En la figura 3-1 se presenta la malla empleada para calcular mediante el método de los elementos finitos los desplazamientos y deformaciones del tanque.



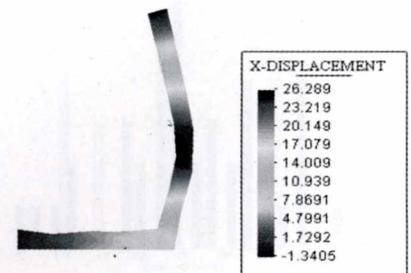
Malla de elementos finitos del tanque (33 nodos y 20 elementos)

Figura 3.1

En la siguiente Tabla se detallan los factores de cargas aplicadas en los nodos respectivos.

Nodo	Carga X	Carga Y
3	0.10504	0.0
6	0.84027	0.0
7	1.6806	0.0
10	2.5208	0.0
13	3.3611	0.0
16	4.2014	0.0
19	2.4158	-2.40625
20	0.0	-4.8125
23	0.0	-4.8125
28	0.0	-4.8125
31	0.0	-2.40625

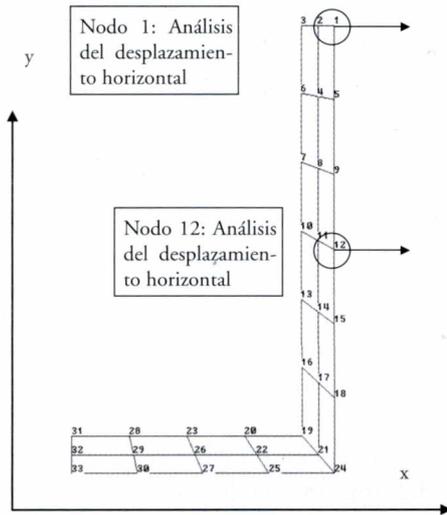
En la siguiente Figura se muestra la deformación de la estructura para el estado de cargas correspondiente al tanque lleno de fluido. También se muestra el campo de desplazamiento en x, donde puede observarse que el desplazamiento correspondiente al borde del recipiente, Nodo 1 es negativo, es decir que el borde superior se mueve con dirección hacia el centro del recipiente.



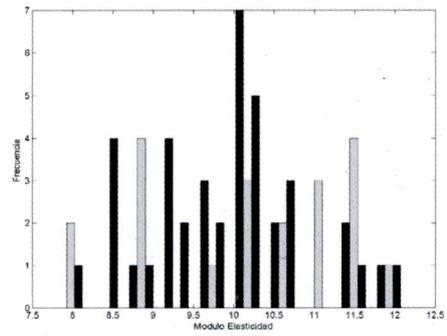
Deformación de la estructura correspondiente al tanque lleno de fluido

3.2 Comportamiento estadístico

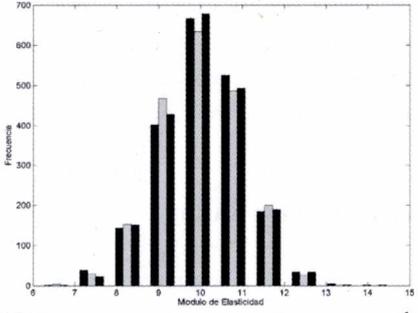
Con el objetivo de analizar el comportamiento estadístico del desplazamiento del borde superior de la estructura (nodo 1) y del centro de la pared del tanque (nodo 12), se llevó a cabo una simulación del tanque para 2000 realizaciones del módulo de elasticidad.



Cada realización del módulo de elasticidad consistió en una distribución Gaussiana de 20 componentes con valor medio 10, varianza 1 y desviación standard 1. Cada componente del vector se corresponde con un elemento de la estructura.

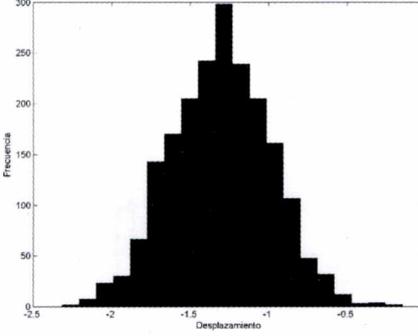


Histograma para tres realizaciones (vectores de 20 componentes) con distribución Gaussiana del módulo de Elasticidad = 10

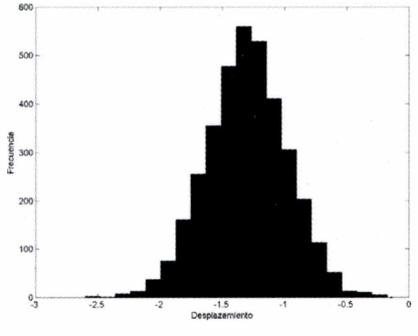


Histograma para tres componentes de todas las realizaciones (vectores de 2000 componentes) con distribución Gaussiana del módulo de Elasticidad = 10

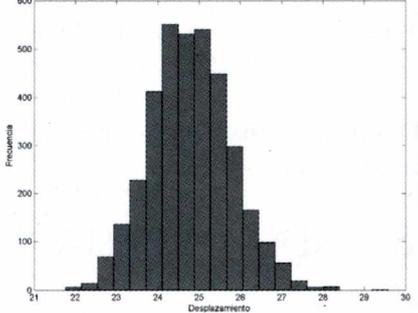
Las siguientes Figuras muestran los histogramas de la variable desplazamiento para los nodos 1 y 12 respectivamente.



Histograma del desplazamiento del Nodo 1 (borde superior del tanque) para 2000 realizaciones del módulo de elasticidad de la estructura.



Histograma del desplazamiento del Nodo 1 (borde superior del tanque) para 3590 realizaciones del módulo de elasticidad de la estructura.



Histograma del desplazamiento del Nodo 12 (centro de la pared del tanque) para 3590 realizaciones del módulo de elasticidad de la estructura.

Los valores estadísticos del desplazamiento del nodo 1 y nodo 12 se detallan en la siguiente Tabla:

Cantidad de Realizaciones	Nodo	Valor medio	Varianza	Desviacion Standard
2000	1	-1.3031	0.1000	0.3163
3590	1	-1.3001	0.1051	0.3242
3590	12	24.7974	0.9589	0.9793

Los valores exactos (cálculo por elementos finitos) para el módulo de elasticidad 10 en toda la estructura se describen a continuación:

Nodo	Desplazamiento Exacto
1	-1.2928
12	24.7445

Los resultados anteriores nos permiten entender la complejidad del problema, ya que el estudio del desplazamiento de dos nodos ante un mismo input (realización de 20 módulos de elasticidad, uno por cada elemento) las distribuciones de desplazamientos en cada nodo son distintas, ya que presentan distintas medias y desviaciones.

Considerando que la solución que se busca es obtener la deformación de toda la pared del tanque, se procedió a relevar los desplazamientos de toda la cara externa del tanque, la cual se compone de 7 nodos. La Figura 3.1 muestra los nodos de toda la malla, en especial los nodos correspondientes a la cara externa son 1, 5, 9, 12, 15, 18 y 24.

3.3 Redes Neuronales

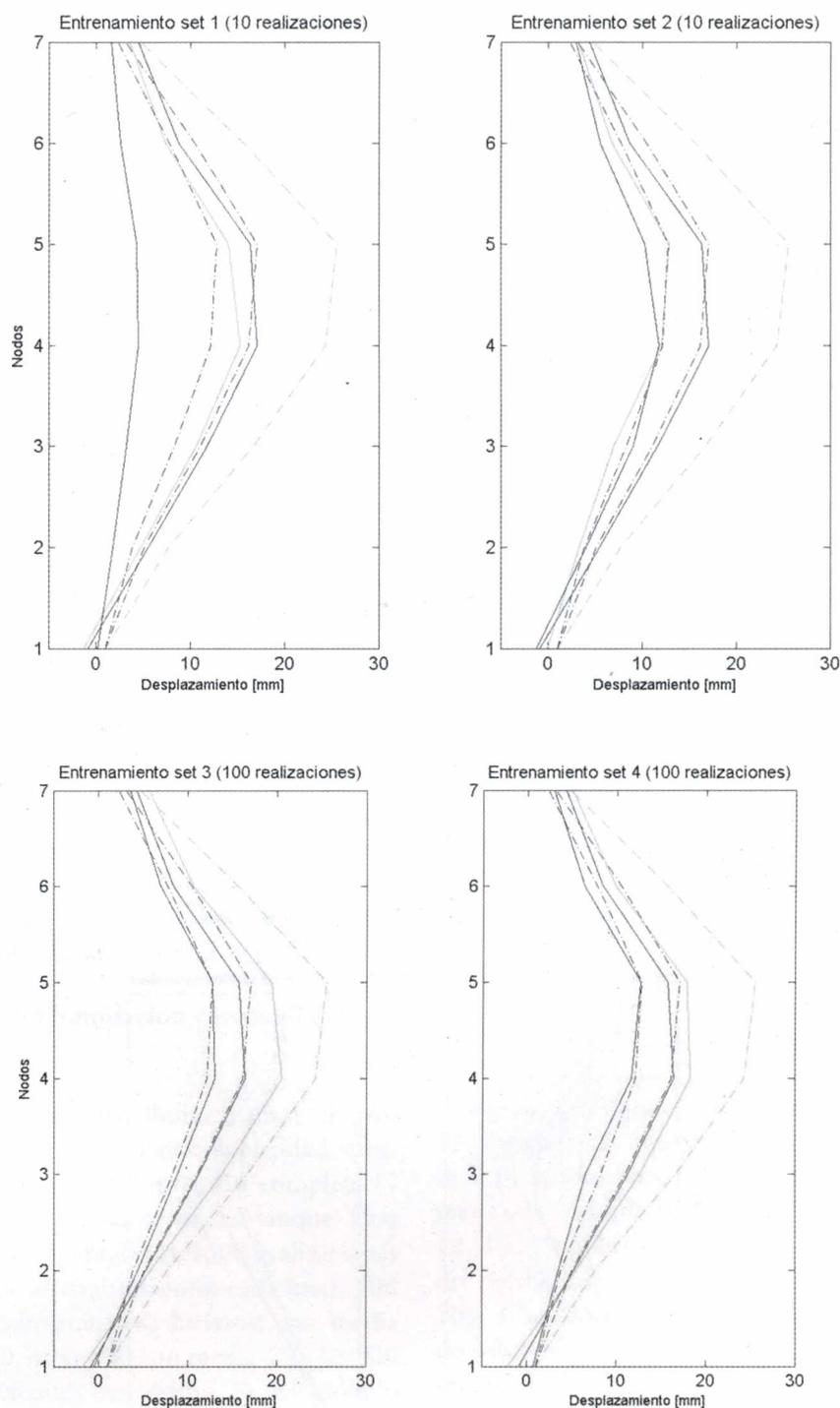
Se analizará el problema estudiando la deformación de los 7 nodos de la pared del tanque. El primer paso es entrenar la red con las realizaciones calculadas estadísticamente (cada realización tiene 20 componentes) y obtener el comportamiento de la red (simulación) de la misma para distintos valores de módulos de elasticidad.

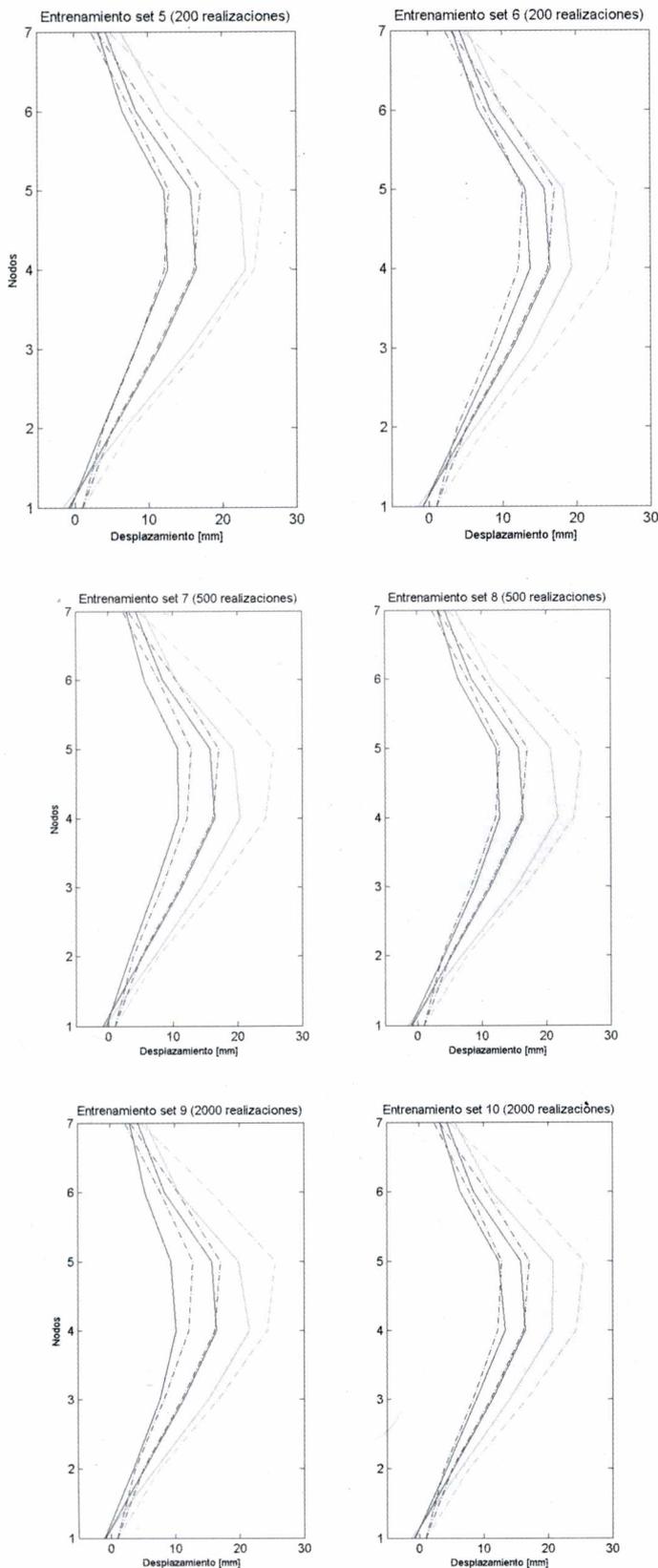
3.3.1 Simulaciones con media 15

Se realizarán, manteniendo la topología de la red, dos entrenamientos de la red neuronal con 10 realizaciones (set 1 y set 2), dos con 100 realizaciones (set 3 y set 4), dos con 200 realizaciones (set 5 y set 6), dos con 500 realizaciones (set 7 y set 8) y dos con 2000 realizaciones (set 9 y set 10), en todos los casos el valor medio del módulo de elasticidad en el entrenamiento es 15. Luego de cada uno de los entrenamientos se hará la simulación de la red entrenada para valores de módulo de elasticidad de 10, 15 y 20.

En los siguientes gráficos, y en los que se verán más adelante, las líneas punteadas representan los valores de desplazamientos obtenidos por elementos finitos y las líneas de trazo continuo representan los resultados

de los desplazamientos obtenidos de la simulación de la red neuronal. Además cabe aclarar que las curvas de color azul son para módulo de elasticidad 20, la roja para 15 y la verde para 10.





En los gráficos se representan los valores de desplazamiento de los 7 nodos de la pared del tanque, donde las líneas punteadas representan los resultados de elementos finitos (EF) y las líneas continuas los resultados de la simulación de la red neuronal (RN).

De los gráficos precedentes puede observarse que al aumentar el número de realizaciones en el entrenamiento de la red las simulaciones se vuelven más robustas. También puede verse que para los valores del módulo de elasticidad que no fue entrenado (en este caso fue entrenado para valor medio 15), las curvas presentan variaciones.

Con el objeto de cuantificar la robustez de la red se calcula el error cuadrático medio E_k de la siguiente manera:

$$E_k = \sum_{i=1}^{Nodos=7} \left[\frac{Desplazamiento_{(i)}^{EF} - Desplazamiento_{(i)}^{RN}}{\mu_k} \right]^2$$

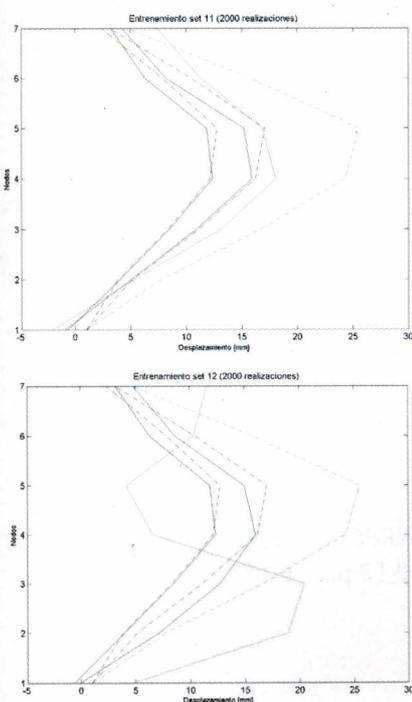
Donde $i = 1, \dots, 7$ son los nodos que estamos analizando, $k=10, 15$ y 20 son los módulos de elasticidad y μ_k es el valor medio de los desplazamientos calculados por elementos finitos (EF) para cada valor de módulo de elasticidad.

	Set	Error		
		Módulo elasticidad 10	Módulo elasticidad 15	Módulo elasticidad 20
10 realizaciones	1	1.7946	0.1184	3.9535
	2	2.7042	0.1170	0.3622
100 realizaciones	3	0.5213	0.1270	0.1254
	4	0.8496	0.1275	0.1187
200 realizaciones	5	0.1875	0.1269	0.1210
	6	0.6663	0.1270	0.1967
500 realizaciones	7	0.4868	0.1271	0.3080
	8	0.3012	0.1269	0.1671
2000 realizaciones	9	0.3957	0.1271	0.5416
	10	0.3766	0.1269	0.1589

En la tabla puede observarse los valores de error para la simulación de la red con módulos de elasticidad de 10, 15 y 20, habiéndose entrenado la red con media 15.

3.3.2 Simulaciones con media 20

Con el objeto de ver el comportamiento de la red entrenándola en un extremo de valores de módulo de elasticidad, se entrenó dos veces la red (set 11 y set 12) con un valor medio de módulo de elasticidad de 20 (el más rígido) y se realizó la simulación para los otros dos módulos de elasticidad.



Aquí puede observarse que si bien el número de realizaciones es importante la simulación para el valor de módulo de elasticidad de 10 se presenta menos robusta que para valores de módulo de elasticidad de 15 y para 20 puede decirse que es muy bueno. A continuación se presenta un cuadro con los valores de error.

	Set	Error		
		Módulo elasticidad 10	Módulo elasticidad 15	Módulo elasticidad 20
2000 realizaciones	11	0.9013	0.1643	0.1416
	12	5.3525	0.2152	0.1416

Aquí puede observarse como para el valor de módulo de elasticidad 20 (para el cual fue entrenado) el error no varía, para 15 es mucho menor y para 10 el valor del error se agranda considerablemente.

3.3.3 Simulación con media 10, 15 y 20

Se intentará ahora analizar el problema en toda su complejidad, estudiando la deformación completa (7 nodos) de la pared del tanque. Para ello se simularon 1500 realizaciones (de 20 componentes cada una), 500 realizaciones se hicieron con media 10, otras 500 con media 15 y las 500 restantes con media 20 del módulo de elasticidad. En todos los casos la desviación es 1. En la Figura 3 2 se

muestran las respuestas (estadísticas) de la estructura para cada una de las realizaciones. Cada una de las curvas representa la deformación de la pared para una dada realización. Se distinguen además tres zonas de deformaciones, cada una de estas zonas se corresponde con una de las tres medias del módulo de elasticidad (10 - 15 - 20).

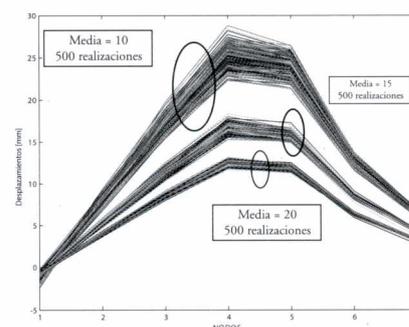


Figura 3 2: Curvas de deformación correspondiente a 1500 realizaciones del módulo de elasticidad (500 con media=10, 500 con media=15 y 500 con media=20)

En Figura 3 3, Figura 3 4, Figura 3 5, Figura 3 6, Figura 3 7, Figura 3 8, Figura 3 9, Figura 3 10, Figura 3 11, Figura 3 12, Figura 3 13 y Figura 3 14 se muestran los histogramas para cada nodo de la pared (1, 5, 9, 12, 15, 18 y 24) y para cada media del módulo de elasticidad (10, 15 y 20). Cada histograma fue construido sobre 500 realizaciones de 20 elementos cada una. Puede verse que a medida que aumenta el valor de la media disminuye la desviación, esto

era de esperarse ya que al aumentar la rigidez de la estructura (mayor E) esta tiende a deformarse menos.

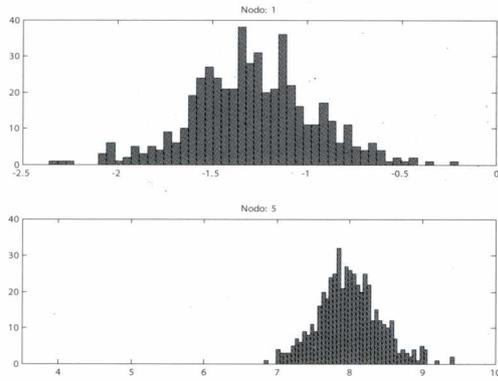


Figura 3 3 Histograma de desplazamientos de los nodos 1 y 5 para E=10.

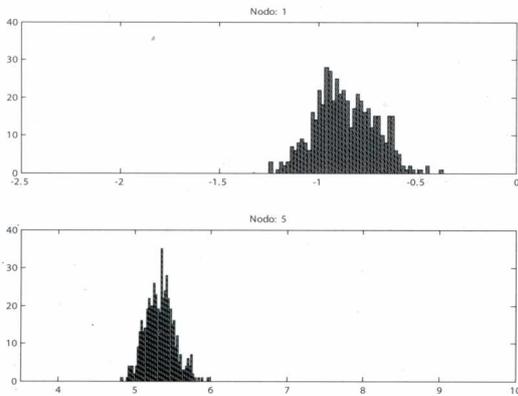


Figura 3 4 Histograma de desplazamientos de los nodos 1 y 5 para E=15.

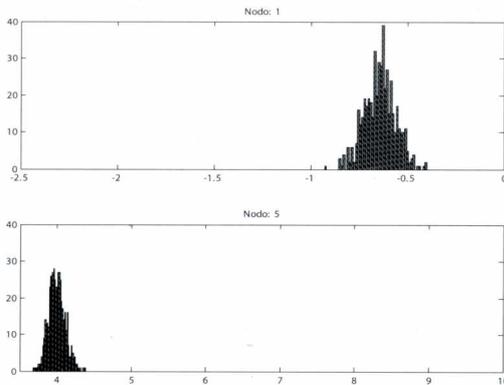


Figura 3 5 Histograma de desplazamientos de los nodos 1 y 5 para E=20.

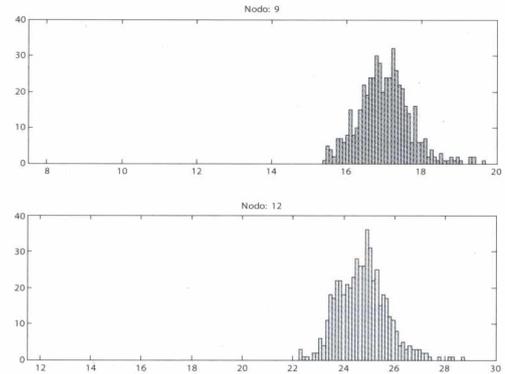


Figura 3 6 Histograma de desplazamientos de los nodos 9 y 12 para E=10.

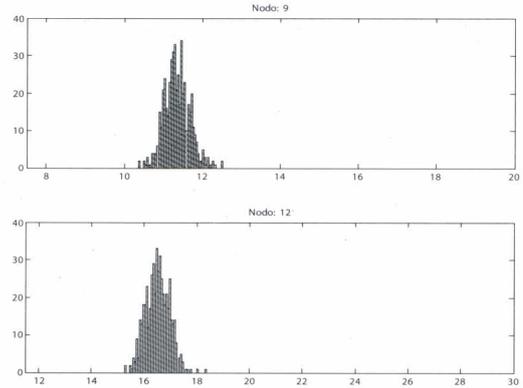


Figura 3 7 Histograma de desplazamientos de los nodos 9 y 12 para E=15.

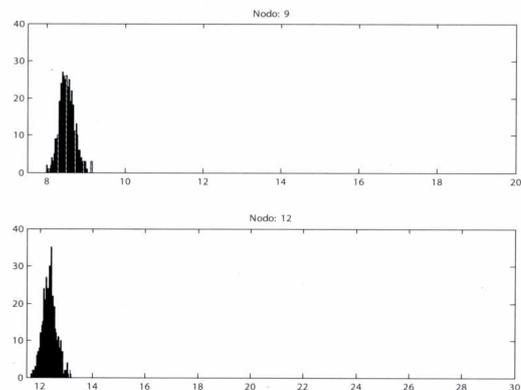


Figura 3 8 Histograma de desplazamientos de los nodos 9 y 12 para E=20.

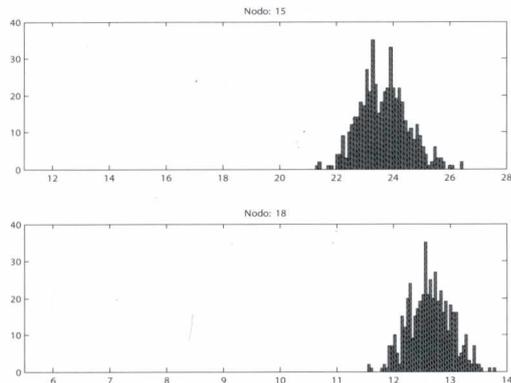


Figura 3 9 Histograma de desplazamientos de los nodos 15 y 18 para E=10.

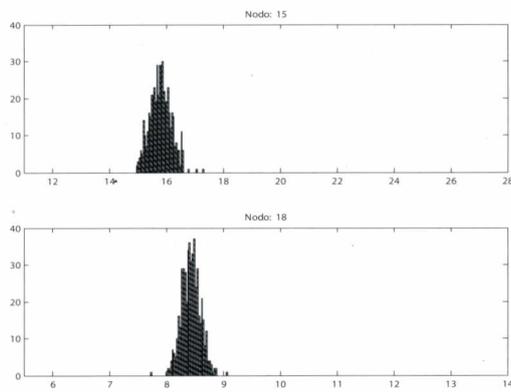


Figura 3 10 Histograma de desplazamientos de los nodos 15 y 18 para E=15.

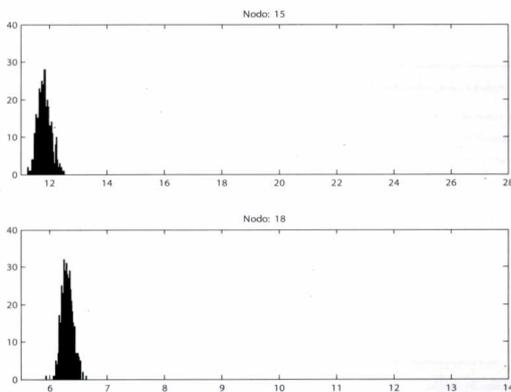


Figura 3 11 Histograma de desplazamientos de los nodos 15 y 18 para E=20.

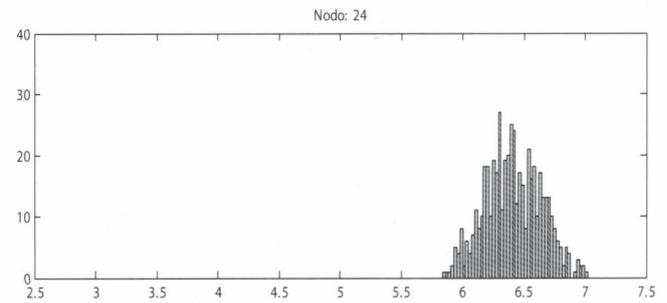


Figura 3 12 Histograma de desplazamientos del nodo 24 para E=10.

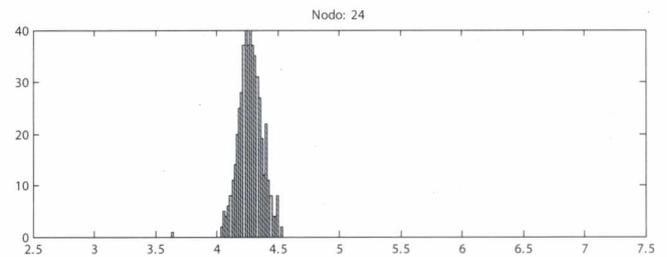


Figura 3 13 Histograma de desplazamientos del nodo 24 para E=15.

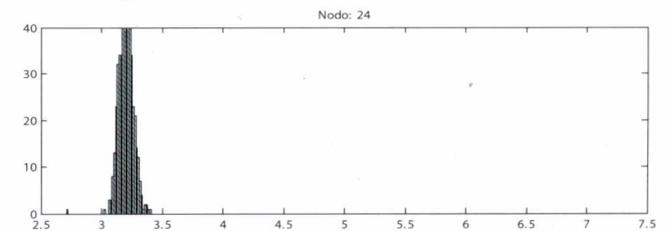
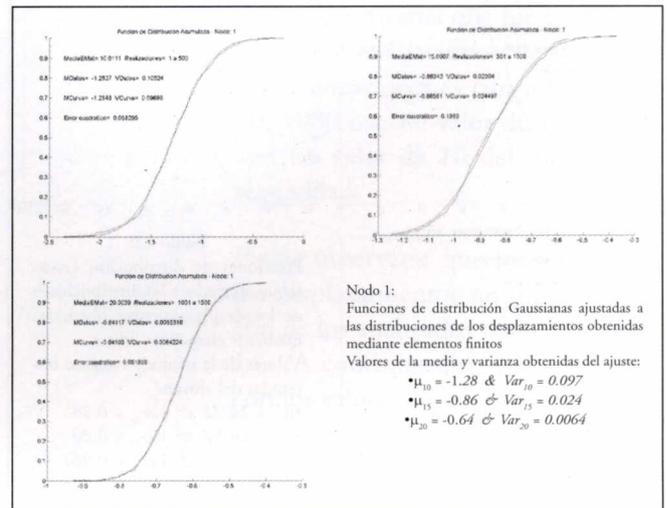
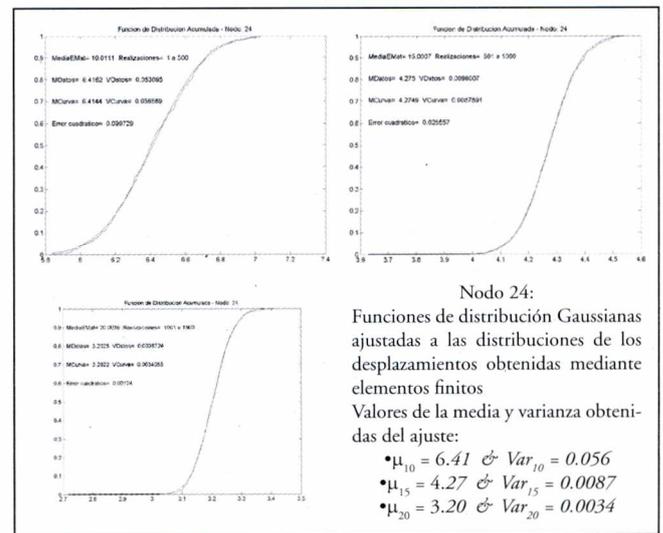
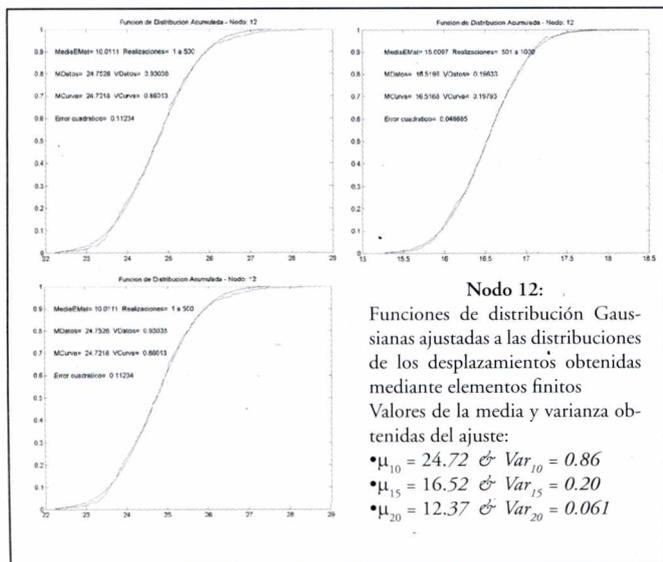
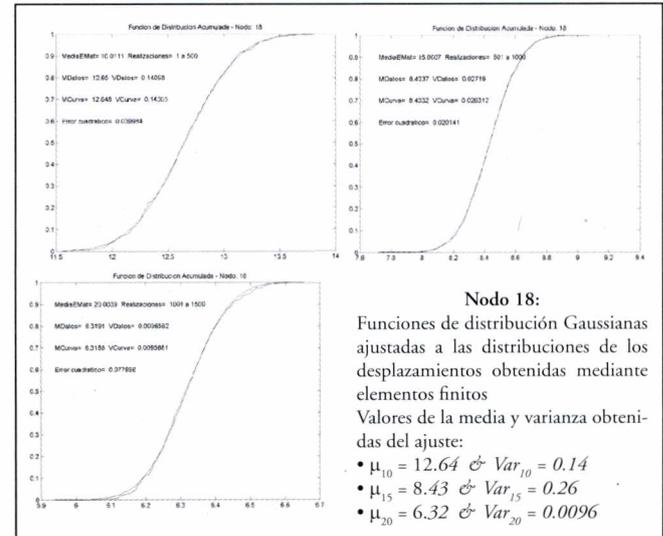
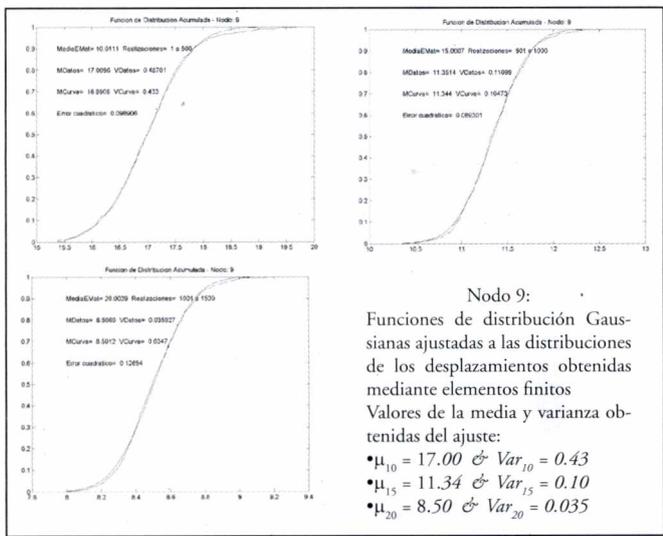
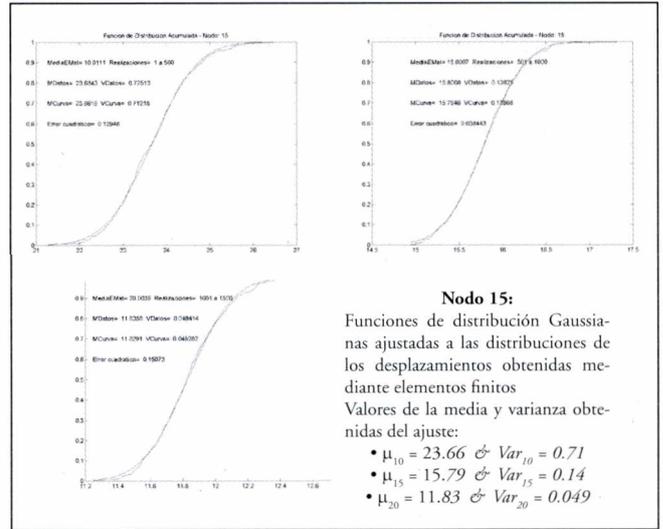
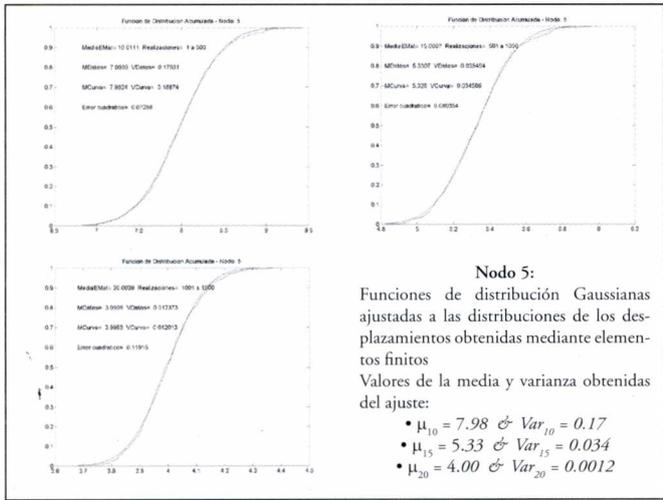


Figura 3 14 Histograma de desplazamientos del nodo 24 para E=20.





Las curvas de distribución Gaussianas ajustadas a los resultados de elementos finitos arrojan valores del error cuadrático medio realmente bajos con lo cual puede decirse que estos ajustes son adecuados.

Una observación importante que se desprende de estos ajustes es que las varianzas de los desplazamientos obtenidas para los distintos módulos de elasticidad cumplen la siguiente relación:

$$\text{Var}_{10} > \text{Var}_{15} > \text{Var}_{20}$$

Esto era de esperar ya que la estructura se vuelve más rígida a medida que aumenta el módulo de elasticidad.

Teniendo en cuenta este resultado parece razonable que para tener un mismo orden de precisión en los resultados la cantidad de simulaciones por módulo de elasticidad no sea la misma sino que siga la siguiente relación:

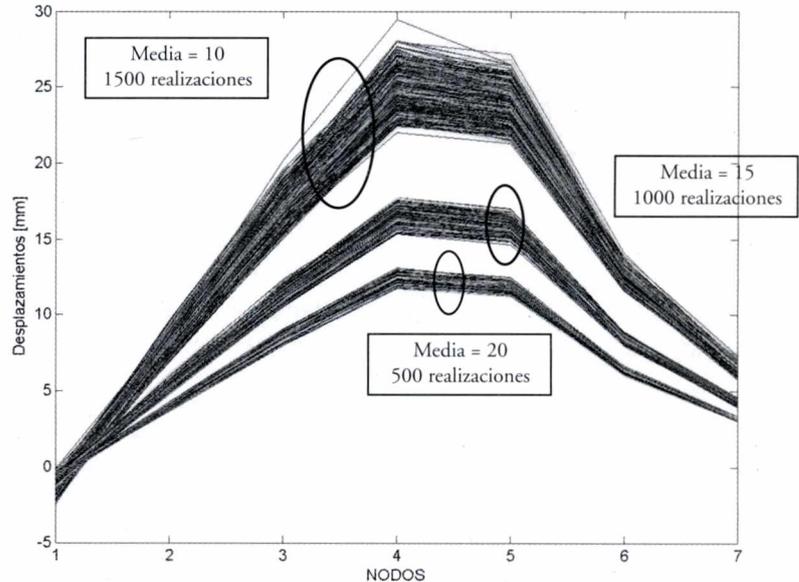
$$\# \text{Simul}_{10} > \# \text{Simul}_{15} > \text{Simul}_{20}$$

Las cantidades adoptadas para el nuevo análisis son las siguientes:

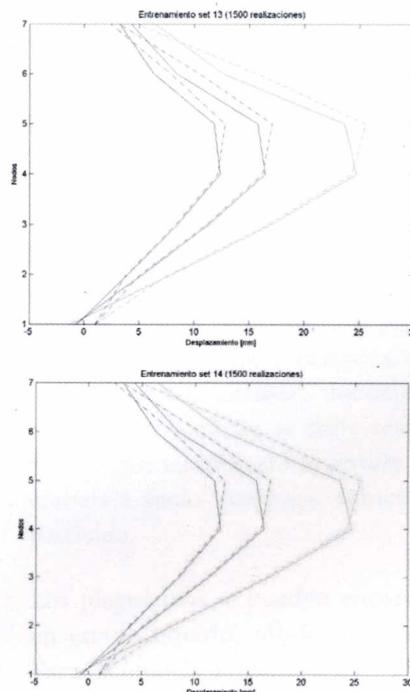
- $\# \text{Simul}_{10} = 1500$
- $\# \text{Simul}_{15} = 1000$
- $\# \text{Simul}_{20} = 500$

La siguiente figura muestra el conjunto de curvas de desplazamientos para la nueva simulación detallada arriba:

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la simulación de una red neuronal que fue entrenada con 1500 realizaciones (500 con media 10, 500 con media 15 y 500 con media 20 del módulo de elasticidad).



Las curvas de desplazamientos de la primera de las simulaciones (set 13) no presentan diferencias aparentes con la segunda simulación (set 14). En las figuras se muestra en línea punteada los resultados calculados por elementos finitos y en línea continua los resultados obtenidos de la simulación de la red neuronal.



Puede observarse que hay cierta robustez en el comportamiento de la red y puede decirse que el resultado es muy bueno dada la cantidad de realizaciones que se emplearon, pues 500 para cada valor de módulo de elasticidad no representa todas las combinaciones posibles de rigideces para los 20 elementos pero sugiere una cantidad importante.

En el gráfico que se encuentra a continuación (set 15) se muestran los resultados de efectuar una simulación de la red neuronal que fue entrenada con 3000 realizaciones, de las cuales 500 realizaciones es con un valor de 20, 1000 con un valor de 15 y 1500 con un valor de 10 del módulo de elasticidad.

Puede observarse que los valores de los desplazamientos no difieren mucho de los analizados para el set 13 y 14. A continuación vemos la tabla con los valores de los errores.

	Set	Error		
		Módulo elasticidad 10	Módulo elasticidad 15	Módulo elasticidad 20
1500 realizaciones	13	0.1139	0.1266	0.1412
	14	0.1139	0.1274	0.1422
3000 realizaciones	15	0.1139	0.1274	0.1422

4 Conclusiones

- Se analizó en forma estocástica un reservorio de líquido, el cual conforma una estructura de ingeniería altamente no lineal en su comportamiento.
- Como primera etapa se desarrolló un código de elementos finitos el cual permitió el análisis de la estructura para diferentes módulos de elasticidad.

- En una segunda etapa se entrenó una red neuronal (Back-propagation) y se la utilizó para predecir los desplazamientos de la estructura.

Modelo de cálculo	Factor Tiempo de cálculo	Factor de Error
Elementos Finitos	10	1
Red Neuronal	1	1.13

- El modelo desarrollado predice correctamente los desplazamientos de la estructura y tiene la ventaja sobre el modelo de elementos finitos que los tiempos de cálculo se reducen mas de 10 veces. La siguiente tabla resume los valores de tiempo y errores numéricos según el método utilizado.

Esta última tabla muestra cuantitativamente la conveniencia de utilizar la red neuronal en lugar de realizar una nueva corrida de elementos finitos.