



Un algoritmo de retorno radial modificado para elastoplasticidad usando elementos cuadriláteros con integración en los puntos medios de los lados

Keywords

Plasticidad, Elementos Finitos, Retorno Radial.

Resumen

Se presenta una variante del algoritmo de retorno radial para integración de las ecuaciones de elastoplasticidad usando elementos cuadriláteros bilineales con esquemas de integración numérica con puntos en los medios de los lados. Estos puntos de integración en principio son utilizados para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento, produciendo una economía en la cantidad de evaluaciones en comparación con las necesarias con los esquemas tradicionales de integración gaussiana. En este trabajo se introduce además el uso de estos puntos en el algoritmo de plasticidad. Debido a que estos puntos se encuentran en los lados del elemento es posible predecir los avances del frente de plasticidad con mayor precisión que usando los puntos internos de integración de Gauss. Además de la ventaja anterior, la utilización de estos puntos permite la predicción de las variables plásticas con gran precisión, pues utilizando información de los elementos vecinos al lado es posible obtener estimativas superconvergentes de las tensiones y deformaciones en dichos puntos. Por otro lado en los contornos del dominio es posible imponer directamente los valores de contorno en dichos puntos de integración.

1. Introducción

En este trabajo se presenta un algoritmo de retorno radial modificado aplicado a cuadriláteros con integración en los puntos medios de los lados. La necesidad de utilizar plasticidad en este tipo de elemento de alta eficiencia llevo a un nuevo planteo del algoritmo plástico de retorno radial para ser compatible con la formulación elemental. Este algoritmo plástico se utilizara bajo condiciones de deformaciones infinitesimales, las cuales involucran la mayoría de los fenómenos elastoplásticos como ser en metales (aceros, aluminio y otras aleaciones). A continuación se dará una introducción a la formulación elastoplastica clásica para pequeños desplazamientos y defor-maciones infinitesimales.

1.1. Relaciones constitutivas fenomenológicas

Las relaciones constitutivas fenomenológicas son modelos descriptivos del comportamiento de los materiales ajustables mediante ensayos de laboratorio. En los análisis de respuesta inelastica, básicamente se encuentran tres condiciones cinemáticas:

1. Pequeños desplazamientos / rotaciones y pequeñas deformaciones
2. Grandes desplazamientos / rotaciones, pero pequeñas deformaciones.
3. Grandes desplazamientos / rotaciones y grandes deformaciones.

Para modelar el comportamiento elasto-plástico de metales, y en particular aceros.

Generalmente se utiliza la ley de fluencia de von Mises con plasticidad asociada [1], [4] y [5].

En el caso de deformaciones infinitesimales se recurre a modelos clásicos basados en la descomposición aditiva de la velocidad de deformación. En el caso de deformaciones finitas se recurre a modelos basados en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones [2] y [3].

1.2. Deformaciones Infinitesimales

Usando la descomposición aditiva de diferenciales de deformación:

$$de_{ij} = de^E_{ij} + de^P_{ij} \quad (1)$$

El incremento de tensión esta dado por la siguiente relación

$$d\sigma_{ij} = C^E_{ijrs} (de_{rs} + de^P_{rs}) \quad (2)$$

Donde:

- C^E_{ijrs} : componentes del tensor constitutivo elástico
- de_{ij} : componentes del tensor incremento de deformación total
- de^E_{ij} : componentes del tensor incremento de deformación elástica
- de^P_{ij} : componentes del tensor incremento de deformación plástica

Para calcular las deformaciones plásticas, en el caso de metales, se utilizan tres leyes para caracterizar el comportamiento del material:

1. Condición de fluencia de von Mises.
2. Una ley de flujo plástico asociada usando la función de fluencia de von Mises, que relaciona el incremento de deformación plástica con las tensiones.
3. Una ley de endurecimiento, bilineal o multilineal, isótropo o cinemático, la cual especifica cómo es modificada la función de fluencia durante el flujo plástico.

1.3. Condición de fluencia de von Mises

Se define la tensión hidrostática en el instante de tiempo t como:

$${}^t\sigma_m = \frac{1}{3} {}^t\sigma_{kl} \delta_{kl} \quad (3)$$

donde δ_{kl} es el delta de Kronecker:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (1 \leq k, l \leq 3) \quad (4)$$

Se pueden expresar las componentes del tensor de tensiones como:

$${}^t\sigma_{ij} = {}^t s_{ij} + {}^t\sigma_m \delta_{ij} \quad (5)$$

Siendo:

- S_{ij} : componentes del tensor de tensiones desviadoras
- $\sigma_{ij}\delta_{ij}$: componentes del tensor de tensiones hidrostáticas

Despejando se obtiene la expresión de las componentes del tensor de tensiones desviadoras,

$${}^t s_{ij} = {}^t\sigma_{ij} - {}^t\sigma_m \delta_{ij} \quad (6)$$

Se define una función de fluencia t , en la cual los estados tensionales de inicio de plastificación son aquellos que verifican:

$${}^t f_y = {}^t f_y ({}^t\sigma_{ij}, {}^t e^P_{ij}) = 0 \quad (7)$$

Para $t < 0$ los puntos se encuntran bajo en estado elástico. Aquellos puntos que se encuentran sobre la superficie de fluencia ($t = 0$) indican flujo plástico.

La condición de fluencia de von Mises se escribe como:

$${}^t f_y = \frac{1}{2} ({}^t \underline{s} - {}^t \underline{\alpha}) : ({}^t \underline{s} - {}^t \underline{\alpha}) - \frac{1}{3} ({}^t \sigma_y)^2 = 0 \quad (8)$$

donde:

- ${}^t \underline{s}$ es el tensor de tensiones desviadoras al instante t
- ${}^t \underline{\alpha}$ representa el corrimiento del centro de la superficie de fluencia ("back stress tensor") en el instante t
- ${}^t \underline{\sigma}$ tensión de fluencia en el instante de tiempo $t=1$

La deformación plástica efectiva se escribe como,

$${}^t \bar{e}^{-P} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} d\underline{e}^P . d\underline{e}^P \quad (9)$$

donde deP es el tensor de incrementos de deformación plástica diferencial y sus componentes quedan definidas por la ecuación de la ley de flujo plástico.

1.4. Ley de flujo plástico

Para este tipo de materiales (metales) la ley de flujo plástico es asociada y por lo tanto [1], [4], [5]:

$$de_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda ({}^t s_{ij} - {}^t \alpha_{ij}) \quad (10)$$

Siendo $d\lambda$ un parámetro plástico.

1.5. Leyes de endurecimiento por deformación plástica

La función de fluencia para el caso de endurecimiento isótopo se reduce a,

$${}^t f_y = \frac{1}{2} (\underline{s} : \underline{s}) - \frac{1}{3} ({}^t \sigma_y)^2 = 0 \quad (11)$$

Esta última función de ley de fluencia define un cilindro en el espacio de las tensiones principales cuyo eje de simetría (línea hidrostática) forma un ángulo de 45° con cada uno de los ejes coordenados de las tensiones principales. En otras palabras, la superficie de fluencia de von Mises en el instante de tiempo t está representada por la superficie de un cilindro circular de radio $R = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^t \sigma_y$ cuyo eje de revo-

lución coincide con la recta de estados de tensión hidrostática donde las tensiones principales son iguales entre sí. Para el caso de ley de endurecimiento cinemático,

$${}^t f_y = \frac{1}{2} (\underline{s} - \underline{\alpha}) : (\underline{s} - \underline{\alpha}) - \frac{1}{3} ({}^t \sigma_y)^2 = 0 \quad (12)$$

Hasta aquí se han presentado las ecuaciones que describen la plasticidad infinitesimal. Respecto al algoritmo, básicamente consiste en estimar las tensiones predictoras elásticas y corregirlas, en caso de ser necesario, para que cumplan con las condiciones de la superficie de fluencia. A continuación se muestra un esquema gráfico del algoritmo,

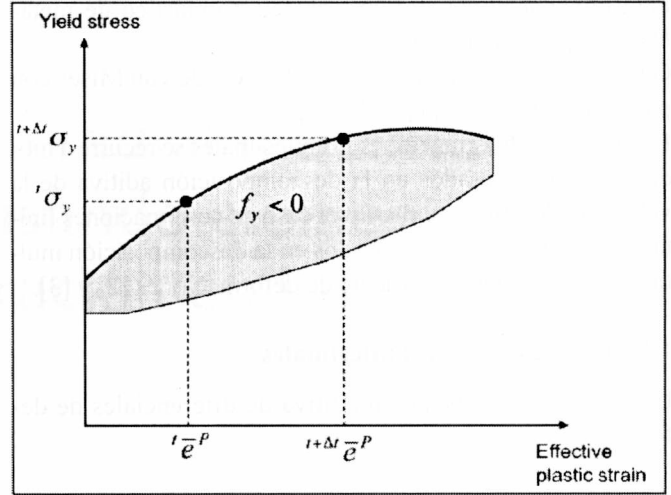


Figura 1: Curva de tensión de fluencia en función de la deformación plástica efectiva

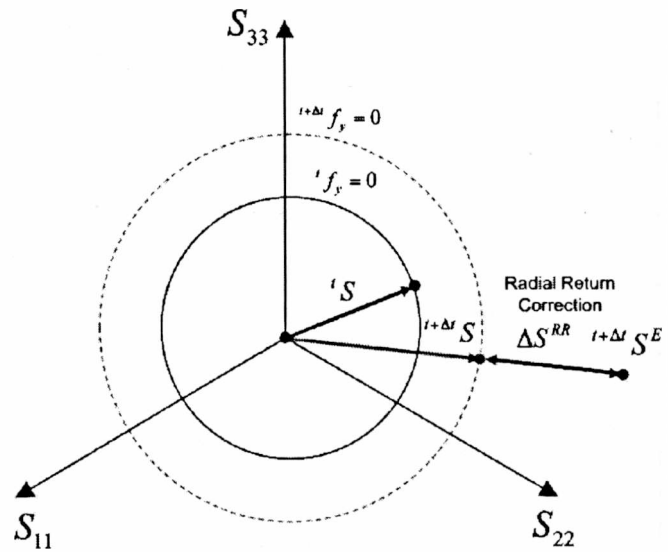


Figura 2: Esquema del algoritmo de retorno radial

El algoritmo de retorno radial clásico para cada uno de los puntos de integración de la matriz de rigidez elemental y del vector de fuerzas internas equivalentes puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Cálculo de las deformaciones totales.
2. Cálculo de las tensiones predictoras elásticas.
3. Cálculo de las tensiones desviadoras.
4. Cálculo de los parámetros plásticos.
5. Corrección de las tensiones (Retorno Radial).
6. Cálculo de las deformaciones plásticas.

7. Cálculo de la matriz constitutiva elasto-plástica.
8. Cálculo del aporte a la matriz de rigidez elemental.
9. Adición del aporte a la matriz de rigidez elemental.
10. Cálculo del aporte del vector de cargas internas equivalentes.
11. Adición del aporte al vector de cargas internas equivalentes.

2. elemento cuadrilátero con integración en los puntos medios de los lados

El elemento cuadrilátero de 4 nodos con integración en los puntos medios de los lados [6] se esquematiza en la siguiente figura,

Este elemento se caracteriza por poseer los puntos de integración en los puntos medios de los lados. Los pesos de integración se dan en Figura 3.

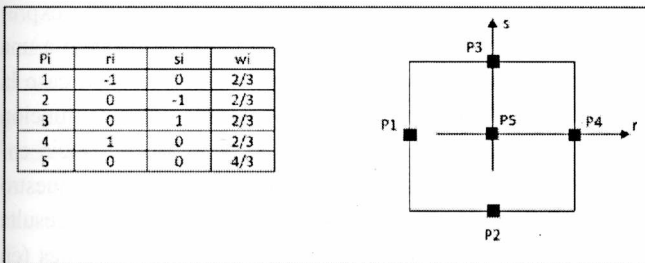


Figura 3: Elemento cuadrilátero de integración en los lados

3. Algoritmo de retorno radial modificado

Como ya se ha sugerido anteriormente, el algoritmo de retorno radial modificado tiene como objetivo la implementación de un algoritmo de plasticidad al elemento de integración en los puntos medios de los lados.

Debido a que el elemento empleado tiene un punto central y 4 en los puntos medios de los lados, que a su vez son compartidos con los elementos vecinos, la aplicación del algoritmo de retorno radial varía según el tipo de punto de integración, a saber:

- En caso del punto central se utilizara el algoritmo clásico.
- En caso de los puntos medios de lado se utilizara el algoritmo modificado.

Básicamente el algoritmo modificado se basa en la forma de calcular las deformaciones en dicho punto. A continuación se muestra el cálculo del tensor de deformación en el punto.

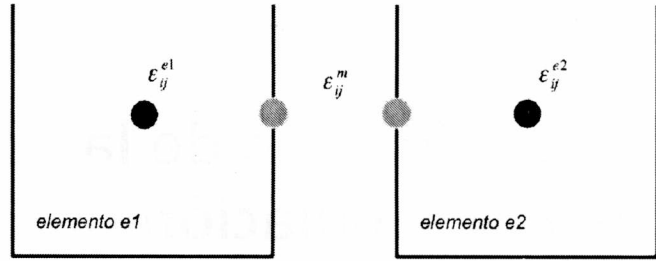


Figura 4: Cálculo de las deformaciones en el punto medio del lado

$$\epsilon_{ij}^m = \frac{\epsilon_{ij}^{e1} + \epsilon_{ij}^{e2}}{2} \quad (13)$$

La ecuación anterior muestra que el tensor de deformaciones en el punto medio del lado se obtiene como el promedio de las deformaciones evaluadas en el centro del elemento. Una vez obtenidas las deformaciones se procede con los pasos 2 al 11 del procedimiento descrito anteriormente. Debe notarse que este punto compartido por sus dos elementos vecinos va a acumular sus correspondientes parámetros plásticos a lo largo de todo el proceso de carga.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó un algoritmo de retorno radial modificado aplicado a elementos cuadriláteros de integración en los puntos medios de los lados.

Referencias

- [1] Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1950.
- [2] Lee, E.H. and Liu, D.T., Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis, J Appl Phys Vol.38, pp.17-27, 1967.
- [3] Lee, E.H. Elastic plastic deformation at finite strain, J Appl Mech, Vol.36, pp.1-6, 1969.
- [4] Malvern, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, 1969.
- [5] Mendelson, A., Plasticity: Theory and application, Macmillan Publishing Company, 1968.
- [6] Pereira J.M., Jouglaud C.E., Comparisons of integration rules with midside points for quadrilaterals, Mecom 2010.