

# Formulaciones de Elementos Finitos Lineales y No Lineales con aplicaciones a Ingeniería Civil

## Estado actual del conocimiento del tema

La necesidad de resolver problemas complejos en ingeniería ha llevado a contar actualmente con herramientas de simulación numérica capaces de reemplazar costosos ensayos de prototipos y que permiten evaluar rápidamente diferentes alternativas de diseño. Hoy en día el uso de programas de computación basados en el método de elementos finitos es prácticamente de uso generalizado en los ámbitos de ingeniería, y son un componente indispensable del diseño asistado por computadora (CAD). La gran mayoría del software comercial disponible actualmente [1,2,3,4] dispone de una gran capacidad de análisis de problemas elastoplásticos, sin embargo no están adecuadamente preparados para llevar en cuenta la presencia y la

influencia de imperfecciones geométricas en el análisis.[5]

El tratamiento numérico adecuado de la elastoplasticidad permite el análisis de problemas de interés tecnológico, como por ejemplo la resistencia de uniones roscadas [6], obviando la necesidad de costosos ensayos y potencia la capacidad de diseño. Por otro lado las formulaciones de elementos finitos actualmente en uso [7,8,9] son extensiones mejoradas de desarrollos originados hace 30 a 40 años [9], cuando no se encontraba difundido el cálculo paralelo. El cálculo paralelo consiste en utilizar computadoras con múltiples procesadores. Las computadoras paralelas comenzaron a difundirse en la década de los 80 e inicialmente eran muy costosas, pero hoy en día esta tecnología se está imponiendo en las PCs con la introducción de procesa-

dores de varios núcleos [11, 12]. La adecuación de los códigos para ser utilizados eficientemente en estas arquitecturas de computadoras ha demostrado que no es suficiente con adaptar formulaciones originales con nuevos métodos de solución [13], es necesario también optimizar las formulaciones de elementos finitos para explotar toda la capacidad de las nuevas computadoras. La mayoría de los códigos utilizan elementos cuadriláteros o hexaédricos que no son los más adecuados para la discretización automática del dominio.

Podemos concluir que las técnicas actualmente empleadas para el análisis de problemas elastoplásticos con imperfecciones no están completamente desarrolladas, siendo su estudio de importancia para el tratamiento adecuado de problemas de interés tec-

nológico en el diseño de estructuras civiles y mecánicas

**Formulaciones de Elementos Finitos 2D**

El uso de distintas formulaciones de elementos finitos en la ingeniería civil se debe a los distintos problemas que se presentan. Es el caso de estructuras tipo vigas pared el cual responde a un estado plano de tensiones, túneles (estado plano de deformaciones), tuberías (estado axil simétrico).

Para cada uno de estos estados se pueden emplear formulaciones diversas de elementos finitos, a continuación se presentan cinco de ellas. Comenzando por la de valor predictivo mas bajo (Elemento estándar de 4 nodos de interpolación) a la mas alta (elementos de 9 nodos de interpolación de desplazamientos y 3 de presiones). En la **Figura 1** se muestran las distintas formulaciones de elementos finitos por interpolación de desplazamientos y formulaciones mixtas. El elemento a utilizar en los análisis dependerá de la geometría, de la precisión deseada y del hardware disponible.

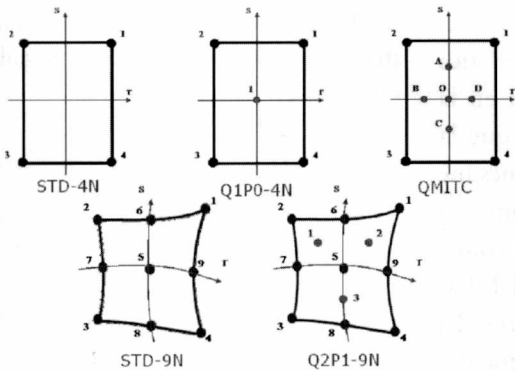


Figura 1: Distintas formulaciones de elementos finitos

$$de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^P \quad \text{I) Descomposición aditiva}$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijrs}^E \cdot (de_{rs} - de_{rs}^P) \quad \text{II) Relación Tension-Deformacion}$$

$${}^t\sigma_{ij} = {}^t s_{ij} + {}^t\sigma_m \cdot \delta_{ij} \quad \text{III) Tensor de tensiones de Cauchy}$$

$${}^t f_y = \frac{1}{2} ({}^t s - {}^t \alpha) : ({}^t s - {}^t \alpha) - \frac{1}{3} ({}^t \sigma_y)^2 = 0 \quad \text{IV) Criterio de fluencia de von Mises}$$

$${}^t e^P = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} d\bar{e}^P \cdot d\bar{e}^P} \quad \text{V) Deformación plástica efectiva}$$

$$de_{ij}^P = d\lambda \cdot \frac{\partial {}^t f_y}{\partial {}^t \sigma_{ij}} = d\lambda ({}^t s_{ij} - {}^t \alpha_{ij}) \quad \text{VI) Regla de flujo asociado}$$

Figura 2: Ecuaciones diferenciales para plasticidad con pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.

**Elementos Finitos No Lineales: Elastoplasticidad**

Las **relaciones constitutivas fenomenológicas** son modelos descriptivos del comportamiento de los materiales ajustables mediante ensayos de laboratorio. En los análisis de respuesta inelástica básicamente se encuentran tres condiciones cinemáticas:

1. Pequeños desplazamientos / rotaciones y pequeñas deformaciones.

2. Grandes desplazamientos / rotaciones, pero pequeñas deformaciones.
3. Grandes desplazamientos / rotaciones y grandes deformaciones.

Para modelar el comportamiento elasto-plástico de metales, y en particular aceros, generalmente se utiliza la ley de fluencia de von Mises con plasticidad asociada

En el caso de deformaciones infinitesimales se recurre a modelos clásicos

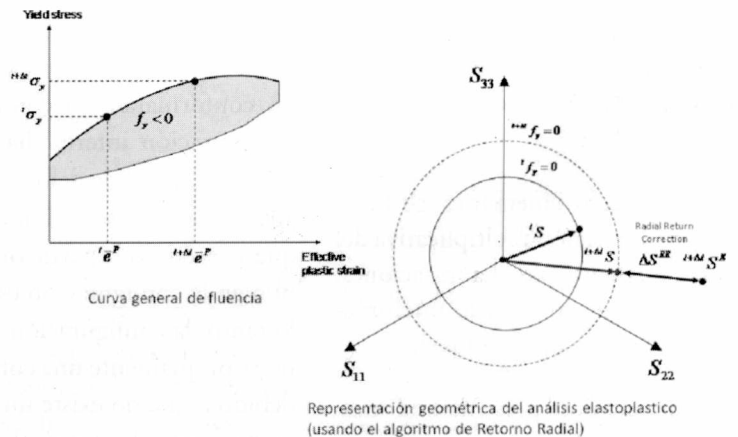
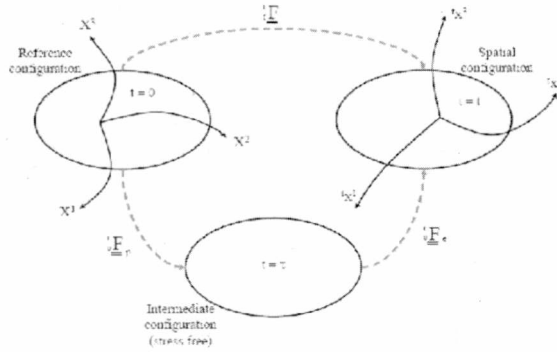


Figura 3: Algoritmo de integración de las ecuaciones diferenciales.

basados en la descomposición aditiva de la velocidad de deformación [6, 7, 17 a 23]. En la **Figura 2** se detalla el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver para el caso de elastoplasticidad con pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.



La Figura 4 siguiente esquematiza las tres configuraciones: (1) Configuración de referencia, (2) Configuración intermedia y (3) Configuración espacial.

El sistema de ecuaciones diferenciales anteriormente descrito se debe resolver mediante algún esquema de integración numérica. Se adopto el esquema de Retorno Radial el cual permite integrar las ecuaciones diferenciales en un solo paso de integración a diferencia de los esquemas incrementales tradicionales. En la **Figura 3** se presenta el esquema de integración de Retorno Radial.

En el caso de deformaciones finitas (grandes deformaciones) se recurre a modelos basados en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones.

Una formulación cinemática para analizar numéricamente problemas elasto-plásticos con deformaciones finitas puede ser encontrada en los trabajos de Lee.

La formulación cinemática de Lee : La descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones, está basada en un modelo micromecánico de plasticidad en metales.

A continuación se presenta una “descomposición intuitiva” de la descompo-

sición multiplicativa del tensor gradiente de deformación.

Se asume una configuración de referencia libre de tensiones y deformaciones y una configuración espacial para un paso de tiempo “t”. Las deformaciones en esta configuración espacial se componen de una parte elástica y de otra parte plástica.

Si ahora se corta la configuración espacial en volúmenes hexaédricos infinitesimales y se asume un proceso de descarga elástico para cada uno de estos volúmenes, se alcanza una configuración libre de tensiones llamada configuración intermedia.

Los hexaedros infinitesimales obtenidos luego de la descarga elástica no conformarán un continuo en la configuración intermedia, ya que la compatibilidad de deformaciones fue abandonada desde el momento en que se produjo la partición del continuo en la configuración espacial. Por lo tanto, la configuración intermedia no es propiamente una configuración debido a que no existe un mapeo biyectivo entre las partículas de material y R3.

La descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones se expresa como

$${}^t_0 \underline{\underline{F}} = {}^t_0 \underline{\underline{F}}_e \cdot {}^t_0 \underline{\underline{F}}_p$$

Y usando descomposición polar

$${}^t_0 \underline{\underline{F}} = {}^t_0 \underline{\underline{R}} \cdot {}^t_0 \underline{\underline{U}}$$

$${}^t_0 \underline{\underline{F}}_e = {}^t_0 \underline{\underline{R}}_e \cdot {}^t_0 \underline{\underline{U}}_e$$

$${}^t_0 \underline{\underline{F}}_p = {}^t_0 \underline{\underline{R}}_p \cdot {}^t_0 \underline{\underline{U}}_p$$

Siendo:

- ${}^t_0 \underline{\underline{R}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{R}}_p, {}^t_0 \underline{\underline{R}}_p$  : Tensores ortogonales de rotación
- ${}^t_0 \underline{\underline{U}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{U}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{U}}_p$  : Tensores de estiramiento derecho.(simétricos)

$${}^t_0 \underline{\underline{F}}_e = {}^t_0 \underline{\underline{R}}_e \cdot {}^t_0 \underline{\underline{U}}_e$$

$${}^t_0 \underline{\underline{F}}_p = {}^t_0 \underline{\underline{R}}_p \cdot {}^t_0 \underline{\underline{U}}_p$$

Siendo:

- ${}^t_0 \underline{\underline{R}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{R}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{R}}_p$  : Tensores ortogonales de rotación
- ${}^t_0 \underline{\underline{U}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{U}}_e, {}^t_0 \underline{\underline{U}}_p$  : Tensores de estiramiento derecho.(simétricos)

A continuación se detallan definiciones y criterios usados en la Formulación TLH (Total Lagrangian-Hencky Formulation) [7].

Se define el tensor elástico de deformación de Hencky y su conjugado energético,

$${}^t_0 \underline{\underline{H}}_e = 1/n \left( {}^t_0 \underline{\underline{U}}_e \right)$$

$${}^t \underline{\underline{\Gamma}} = {}^t_0 R_e^* \left( {}^t \underline{\underline{\tau}} \right)$$

Donde el tensor conjugado energético es un pull-back del tensor de tensiones de Kirchhoff.

En la configuración espacial, la función de fluencia en términos de las tensiones de Kirchhoff; aplicando la operación de pull-back usando el tensor elástico de rotación, se obtiene:

$${}^t\phi = \left[ \frac{3}{2} ({}^t\underline{\Gamma}_D - {}^t\underline{B}) : ({}^t\underline{\Gamma}_D - {}^t\underline{B}) \right]^{1/2} - {}^t\sigma_y = 0$$

Siendo:

- ${}^t\underline{B} = {}^t_0R_e^* ({}^t\underline{\alpha})$
- ${}^t\underline{\Gamma}_D$  : parte desviadora del tensor  ${}^t\underline{\Gamma}$
- ${}^t\underline{\alpha}$  : tensor back-stress
- ${}^t\sigma_y$  : tensión de fluencia

Para la evaluación de las variables plásticas se utiliza,

Para la evaluación de las variables plásticas se utiliza,

$${}^t\sigma_y = \beta h {}^t\dot{\epsilon}_p$$

$${}^t\dot{\underline{B}} = \frac{2}{3} (1 - \beta) h {}^t\dot{\underline{d}}_p$$

Donde:

- ${}^t\dot{\underline{d}}_p = \text{sym} \left( {}^t_0\dot{\underline{F}}_p : {}^t_0\dot{\underline{F}}_p^{-1} \right)$
- ${}^t\dot{\epsilon}_p = \left[ \frac{2}{3} {}^t\dot{\underline{d}}_p : {}^t\dot{\underline{d}}_p \right]^{1/2}$
- $\beta \in [0, 1]$
- $h = h ({}^t\epsilon_p)$

Para la evaluación de las variables plásticas se utiliza,

$${}^t\sigma_y = \beta h {}^t\dot{\epsilon}_p$$

$${}^t\dot{\underline{B}} = \frac{2}{3} (1 - \beta) h {}^t\dot{\underline{d}}_p$$

Donde:

- ${}^t\dot{\underline{d}}_p = \text{sym} \left( {}^t_0\dot{\underline{F}}_p : {}^t_0\dot{\underline{F}}_p^{-1} \right)$
- ${}^t\dot{\epsilon}_p = \left[ \frac{2}{3} {}^t\dot{\underline{d}}_p : {}^t\dot{\underline{d}}_p \right]^{1/2}$
- $\beta \in [0, 1]$
- $h = h ({}^t\epsilon_p)$

Imponiendo la condición de máxima disipación plástica (plasticidad asociada), se obtiene,

$${}^t\dot{\underline{d}}_p = {}^t\lambda \frac{({}^t\underline{\Gamma}_D - {}^t\underline{B})}{\left[ ({}^t\underline{\Gamma}_D - {}^t\underline{B}) : ({}^t\underline{\Gamma}_D - {}^t\underline{B}) \right]^{1/2}}$$

Donde  $t\lambda$  es la constante a determinar a partir de la condición,

$${}^t\dot{\phi} = 0$$

Valida durante carga plástica.

Para el caso de un incremento nulo de deformación plástica y a partir de la expresión de la energía libre

$${}^t\Psi = {}^t\Psi_e({}^t_0\underline{H}_e) + {}^t\Psi_p({}^t\sigma_y, {}^t\underline{B})$$

se obtiene,

$${}^t\underline{\Gamma} = \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial_0^2 \underline{H}_e}$$

$${}^t\Psi_e = \frac{1}{2} {}^t_0\underline{H}_e : \underline{\underline{C}}^E : {}^t_0\underline{H}_e$$

Donde  $\underline{\underline{C}}^E$  es un tensor elástico de cuarto orden isótropo.

Se obtiene,

$${}^t\Psi = {}^t\Psi_e({}^t_0\underline{H}_e) + {}^t\Psi_p({}^t\sigma_y, {}^t\underline{B})$$

se obtiene,

$${}^t\underline{\Gamma} = \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial_0^2 \underline{H}_e}$$

$${}^t\Psi_e = \frac{1}{2} {}^t_0\underline{H}_e : \underline{\underline{C}}^E : {}^t_0\underline{H}_e$$

Donde  $\underline{\underline{C}}^E$  es un tensor elástico de cuarto orden isótropo.

se obtiene,

$${}^t\Psi = {}^t\Psi_e({}^t_0\underline{H}_e) + {}^t\Psi_p({}^t\sigma_y, {}^t\underline{B})$$

$${}^t\underline{\Gamma} = \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial_0^2 \underline{H}_e}$$

$${}^t\Psi_e = \frac{1}{2} {}^t_0\underline{H}_e : \underline{\underline{C}}^E : {}^t_0\underline{H}_e$$

Donde  $\underline{\underline{C}}^E$  es un tensor elástico de cuarto orden isótropo.

La formulación presentada es solo para las consideraciones de deformaciones finitas. A esto se le sumaran las consideraciones de las propiedades del acero en función de la tempera-

tura y de las velocidades de deformación.

### Consideraciones de Contacto

Formulaciones de contacto deberán ser desarrolladas para poder implementar la interacción entre el herramienta y el producto a laminar. (7, 8, 9, 10)

En la **Figura 5** se muestra un esquema de contacto para dos superficies las cuales se encuentran discretizadas por sus nodos, donde una de ellas se define como target y la otra como contactor.

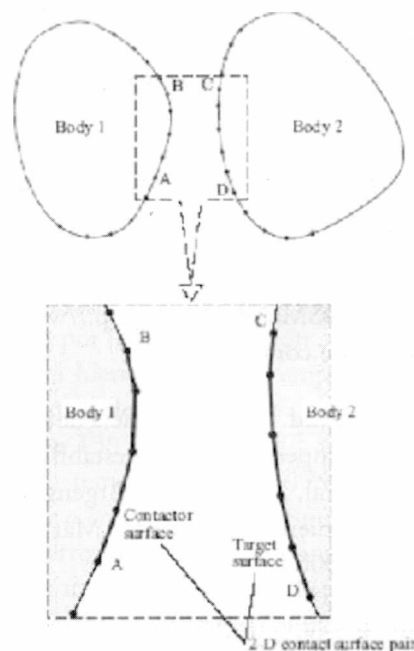


Figura 5: Esquema de superficies de contacto.

### Conclusiones

En primer lugar se presentaron distintos tipos de elementos finitos, considerando aquellos de interpolación de desplazamientos e interpola-

ción de desplazamientos y presiones (mixtos). El elemento a utilizar en los análisis dependerá de la geometría, de la precisión deseada y del hardware disponible.

En segundo lugar se presentó una formulación completa de elasto-plasticidad para pequeñas y grandes deformaciones. Con este tipo de formulaciones se pueden encarar las resoluciones de prácticamente cualquier problema en deformación de metales.

Finalmente se describieron las consideraciones fundamentales de los problemas de contacto.

## Referencias

- [1] ABAQUS, <http://www.abaqus.com>
- [2] ALGOR, <http://www.algor.com>
- [3] ANSYS, <http://www.ansys.com>
- [4] COSMOSworks, <http://www.cosmosm.com>
- [5] Jouglard, C.E., Influencia de modos de imperfección en inestabilidad estructural, XIX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Mar del Plata, 2006.
- [6] Pereiras, J.M., Deformaciones elastoplásticas finitas usando elementos finitos, tesis de maestría en simulación numérica, Universidad de Buenos Aires - Argentina, 2006.
- [7] Bathe, K.J, Finite element procedures, Prentice-Hall, 1996.
- [8] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., Nonlinear finite elements for continua and structures, Wiley, 2000.
- [9] Crisfield, M.A., Non-Linear Finite Element Analysis of solids and structures, vol.2, Wiley, 1997.
- [10] Felippa, C.A., A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts, Report CU-CAS-00-13, University of Colorado, June 2000.
- [11] <http://www.intel.com/multicore/index.htm>
- [12] <http://multicore.amd.com/>
- [13] Jouglard, C.E. y Coutinho A., A Comparison of Iterative Multilevel Finite Element Solvers, Computers & Structures, (69) 5, 655-670, 1998.
- [14] Jouglard, C.E., Estrategias Adaptativas Multinivel para la Solución de Problemas No Lineales por el Método de Elementos Finitos, tesis de Doctorado, COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 1996.
- [15] Jouglard C.E. y Perez, A.L., Elemento finito para vigas imperfectas, ENIEF 2006, Santa Fé.
- [16] Gresho, P.M., Sani, R.L., Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons, Ltd, 1999.
- [17] Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1950.
- [18] Hughes, T.J.R., The Finite Element Method, Prentice-Hall, 1987.
- [19] Simo, J.C. and Hughes T.J.R., Computational Inelasticity, Springer-Verlag, New York, 1998
- [20] Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1994 .
- [21] Davies, J.M., Second-order elastic-plastic analysis of plane frames, Journal of Constructional Steel Research, 58, 1315-1330, 2002
- [22] García-Terán, J.M., Formulación y análisis del comportamiento elastoplástico acoplado y no lineal geométrico de sistemas estructurales de barras, tesis doctoral, Universidad de Valladolid, (2002).
- [23] Krenk S, Vissing C. y Thesbjerg L., Efficient collapse analysis techniques for framed structures, Computers & Structures, (72), 481-496, (1999)