Ariel Fraidenraich [a c], Maximiliano Jesús Pérez [b], Adolfo Edgardo Altenberg [a]

[a] Universidad de la Marina Mercante, UdeMM, Departamento de Ingeniería. [b] Universidad Nacional de la Matanza, UNLaM.

[c] Universidad de Belgrano UB.

Solución de un campo estacionario de temperaturas en una placa irregular utilizando métodos numéricos

Resumen: *Se presenta una visualización del campo estacionario de temperaturas en una placa plana irregular, donde se muestra la utilización de diversos recursos tecnológico-numéricos en el desarrollo de las actividades. El método de los elementos finitos de acuerdo a la implementación de Galerkin (FEM-GALERKIN) es la tecnología elegida para dicho propósito. Esto se lleva a cabo utilizando la plataforma Julia que presenta, adicionalmente, una introducción a la programación para computación de alto rendimiento (HPC).*

Palabras clave: *Método de los Elementos Finitos; Tecnología en la educación; Campo estacionario de temperaturas; Julia.*

1. Introducción

Se presenta una visualización del campo estacionario de temperaturas en una placa plana irregular, donde se muestra la utilización de diversos recursos tecnológico-numéricos en el desarrollo de las actividades. Se muestra de esta forma el aporte al aprendizaje y conceptualización de las propiedades de las ecuaciones de conservación que se enseñan en los cursos de ecuaciones en derivadas parciales. El análisis multidisciplinario propuesto (Físico, matemático, computacional) da un enfoque comprensivo permitiendo una rápida extensión de los resultados a problemas prácticos. La implementación del código se lleva a cabo utilizando la plataforma Julia que presenta, en forma adicional una introducción a la programación para computación de alto rendimiento (HPC).

Este trabajo surgió a partir del dictado de un curso de formación sobre introducción a los elementos finitos.

Para la validación de los modelos numéricos basados en las leyes de conservación de la mecánica del continuo se puede, en algunos casos, contar con la solución analítica que es la función escalar que satisface las leyes de conservación para el problema analizado. El modelo numérico propuesto es FEM-Galerkin [1], que es una metodología para encontrar una aproximación a la resolución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [3]. Normalmente el problema físico se expresa mediante una ecuación diferencial en derivadas parciales, integrándola por medio de la elección de una función de peso se llega a una ecuación integral más fácil de resolver. Para la implementación de este modelo se seleccionó la plataforma Julia [2], la cual presenta un alto nivel de abstracción que permite expresar las diferentes operaciones matemáticas en forma simple. Esta plataforma permite simplificar el desarrollo de soluciones de HPC mediante una completa biblioteca de funciones optimizadas para arquitecturas de memoria compartida y memoria distribuida.

2. Marco Teórico

Se resuelve el siguiente problema diferencial (ecuación de Laplace) que representa al campo de temperatura estacionario u, en un dominio plano irregular D [4].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

D es el dominio de resolución del campo de temperatura. Definiendo la frontera del problema estacionario de temperaturas como $\boldsymbol{L_i}$ con i =1,...,7.

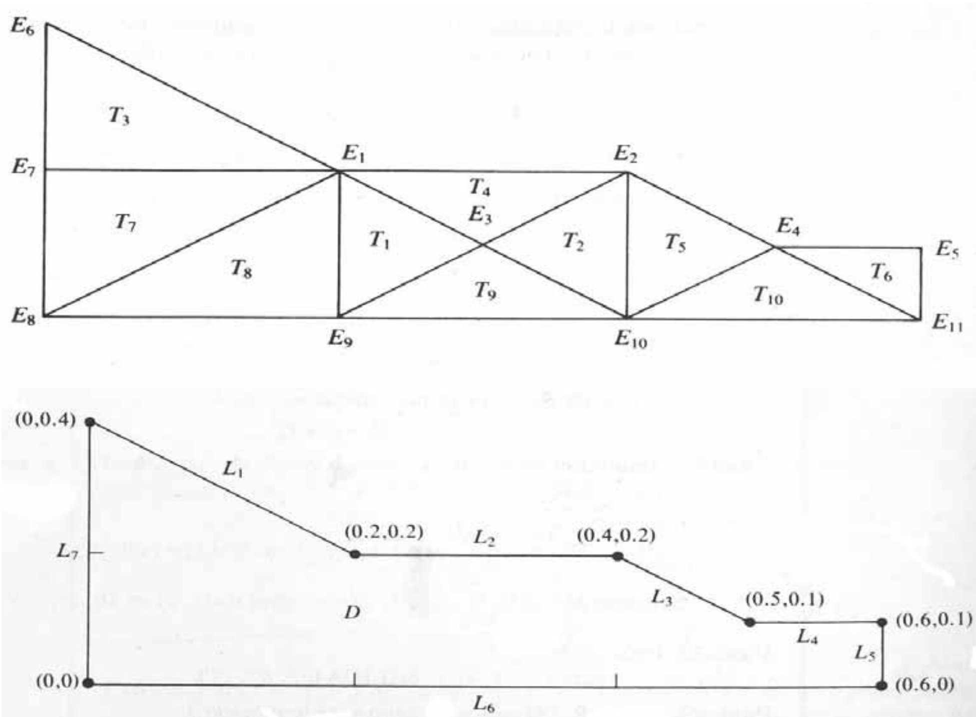

Figura 1: Dominio geométrico y su triangulación.

Las condiciones de contorno son las siguientes
$\boldsymbol{u\ (x, y) = 4}$ Válido en la frontera $\boldsymbol{L_6}$ y $\boldsymbol{L_7}$ (2)
Prescripta la derivada en la dirección normal a la frontera o de Neumann:

$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = x}$ Válido en la frontera $\boldsymbol{L_2}$ y $\boldsymbol{L_4}$ (3)

$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = y}$ Válido en la frontera $\boldsymbol{L_5}$ (4)

$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}}$ Válido en la frontera $\boldsymbol{L_1}$ y $\boldsymbol{L_3}$ (5)

Posteriormente se halla la ecuación integral equivalente para campos suficientemente diferenciables. La ecuación (1) multiplicada por la función de peso $\emptyset$, con sus condiciones de contorno es integrada por partes (Green) de lo que resulta la ecuación (6).

$$\boldsymbol{0 = \int_A \nabla u \ \ \emptyset \ \ dA = \int_A \nabla u \ \ \nabla\emptyset \ \ dA - \oint_{Fr(A)} \frac{\partial u}{\partial n}\emptyset \ \ d\tau} \quad (6)$$

Discretizando y aproximando mediante interpolación a la función u, se llega a obtener la solución en los vértices de la triangulación. Las funciones de base son tomadas como planos construidos en cada elemento de la triangulación y conforman una base del espacio funcional discreto de dimensión finita [1].

3. Resultados y Visualización

Con el trazado de las líneas de nivel se puede reconstruir la función escalar de temperaturas y así poder entender el fenómeno de intercambio de calor en la placa y con el medio externo. Se observa que el crecimiento es muy suave porque las

dimensiones de la placa son pequeñas y que crece en sentido desde el origen (0,0) hacia el estremo superior en forma radial. La pequeña variacion de temperatura que se observa entre el origen y el extremo se debe a que se produce en la parte superior y extremo derecho un intercambio con el exterior.
La solución analítica del problema [4]

$\emptyset = \ xy + 4$ (7)

Esta solución cumple con la ecuación de Laplace (1) [3] y con las condiciones de contorno (2), (3), (4), (5) . Se puede visualizar que, si bien la triangulación es muy poco densa, los resultados numéricos dados por Galerkin comparados con la solución analítica resultan de error aceptable, segùn se muestra en la Tabla 1. Se presenta la resolución como código abierto en la plataforma Julia la cual puede servir para la solución de problemas asociados con leyes de conservación [2].

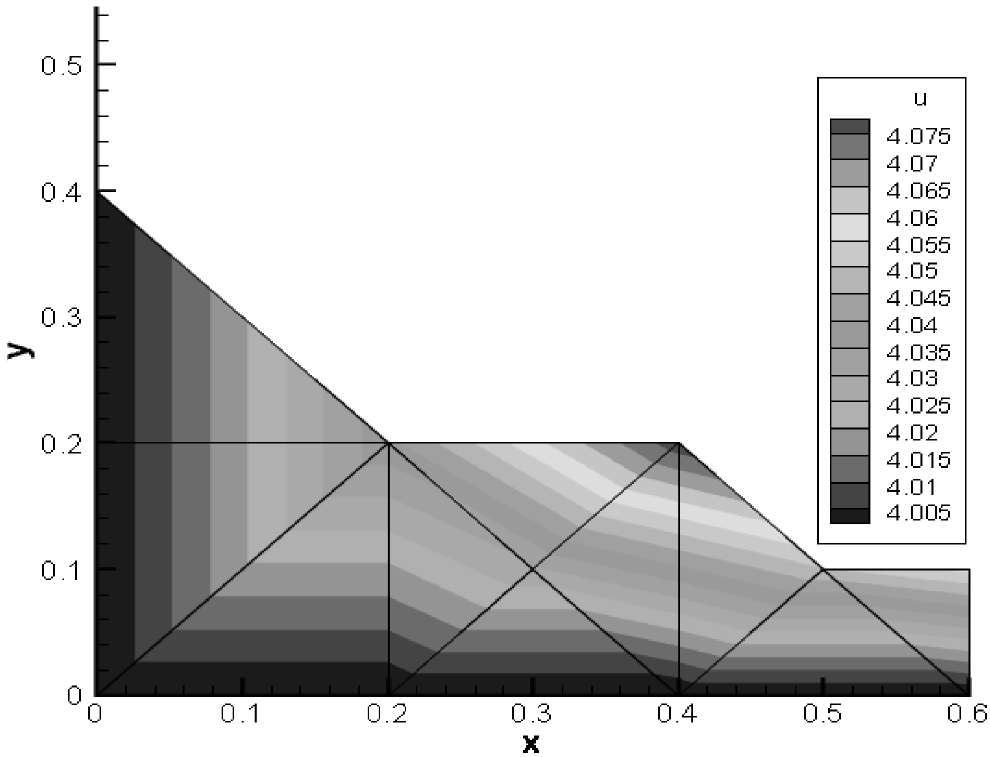

Figura 2: Lineas de nivel de la función u

Tabla 1: Error numérico

x	Y	Ø(x, y)	u(x, y)	Error absoluto
0.2	0.2	4.0383	4.04	0.0017
0.4	0.2	4.0782	4.08	0.0018
0.3	0.1	4.0291	4.03	0.0009
0.5	0.1	4.0496	4.05	0.0004
0.6	0.1	4.0465	4.06	0.0035

Conclusiones

Se presenta la solución del campo estacionario de temperatura en una placa irregular realizada con la metodología de Galerkin de elementos finitos. Se puede visualizar que, si bien la triangulación es muy poco densa, los resultados numéricos dados por Galerkin comparados con la solución analítica resultan de error aceptable. Dicha solución se implementó mediante la utilización de la plataforma de alto nivel de abstracción Julia, la que presenta una introducción a los modelos de computación de alto rendimiento HPC. Se brinda un programa abierto en dicha plataforma computacional apto para su generalización a problemas sobre leyes de conservación. El enfoque propuesto ha sido aplicado con éxito en el dictado del curso “introducción a los elementos finitos” realizado en la Universidad de Belgrano por el Dr. Ariel Fraidenraich y Sr. Maximiliano Pérez.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los alumnos del curso “introducción a los elementos finitos” de la Universidad de Belgrano, Naim Ayoub, Bianca Pérez Fernandez, Mauro Mastronardi, Mathias Morck Avellaneda, Santiago Rodriguez Caputo, Leandro Muchenik y Carla Lucía Gontaretti, por su participación en el desarrollo del material presentado. Los autores quisieran también extender su agradecimiento al Dr. Roberto Fernando de Andrade Lima (CRCN nordeste, Centro Regional de Ciencias Nucleares do Nordeste, Recife, Brasil) por su colaboración en la revisión del material presentado.

Referencias

[1] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. The Finite Element Method. 6th Ed., Vol. 3, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.

[2] Pérez, M. J., Fraidenraich, A. “Resolución por el método de los elementos Finitos (Galerkin) de la temperatura en una placa rectangular irregular en la Plataforma Julia”, Enlace a la carpeta drive con Fem -Julia 2018. https://drive.google.com/open?id=1q2kwuQn7Z3DF6yPXaXR_FBZtp9koR3v

[3] Boyce, W. y Di Prima, R.. Ecuaciones Diferenciales y problemas en valores de la frontera. Ciudad de México, México: (5ta. ed.) Limusa Wiley , 2010

[4] Burden, R. L., Faires J. D. Análisis Numérico .Tercera Edición. Ciudad de México, México. Grupo editorial Iberoamericana. 1985.