

Estudio de algunas sensibilidades en canales abiertos usando las ecuaciones de aguas poco profundas bidimensionales

Palabras Clave: *Taylor Galerkin, Obstáculos Circulares, OpenMP, Sensibilidad.*

Resumen: En líneas generales el estudio de la sensibilidad de parámetros físicos tiene como objeto la cuantificación de los efectos de la variación de dichos parámetros en los resultados calculados. De esta forma se hace posible determinar la influencia, importancia, dominancia de los parámetros físicos analizados. El método de la superficie de respuesta (RSM) se utiliza para determinar el efecto en la salida de interés de un cierto número de parámetros de control. La superficie de sensibilidad se puede obtener interpolando valores de respuestas con respecto a los parámetros físicos obtenidos mediante simulación numérica y derivando la variación de dichas respuestas con respecto a la variación de los mismos. En este trabajo, se realiza un estudio de superficies de respuesta para el caso de un flujo de crecida entrante en un canal abierto rectangular. Además se hace un estudio de sensibilidad para el caso de un obstáculo circular interpuesto a la corriente principal. Este estudio se realizó en base

a simulaciones numéricas utilizando la metodología de Elementos Finitos con la formulación de Taylor Galerkin para aguas poco profundas bidimensionales. Se muestran las variaciones del funcional respuesta (los promedios de aturas y velocidades y sus valores instantáneos). Se muestra que cerca del obstáculo circular se encuentran las sensibilidades máximas lo que ubica allí al punto óptimo de control. Debido a la complejidad del problema y la cantidad de simulaciones realizadas con diferentes combinaciones de los parámetros físicos es necesaria la distribución de la carga computacional en varios procesadores. Esta tarea se realizó con OpenMP bajo una arquitectura de memoria compartida.

1. Introducción

En líneas generales el estudio de la sensibilidad de parámetros físicos tiene como objeto la cuantificación de los efectos de la variación de dichos parámetros en los resultados calculados. El objetivo de un análisis de sensibilidad no es el de confirmar nociones preconcebidas sobre la importancia relativa de los parámetros estudiados sino el

descubrimiento y cuantificación de las características más importantes de los modelos investigados. Inicialmente, las nociones de sensibilidad [7] permanecieron restringidas únicamente a un campo de interés matemático, subsecuentemente dio lugar al uso de la metodología de retroalimentación lo que condujo a la moderna teoría de control incluyendo optimización, síntesis y adaptación. La introducción de los métodos de espacio de estados y el rápido desarrollo de las computadoras digitales proveyó las condiciones adecuadas para el establecimiento de la teoría de sensibilidad como rama de la teoría de control.

El método de la superficie de respuesta (RSM) se utiliza para determinar el efecto en la salida de interés de un cierto número de parámetros de control. En general dicha superficie puede ser aproximada por un polinomio de grado pequeño [8]. Las superficies de respuesta obtenidas por medio de este método pueden también ser halladas interpolando valores de respuesta con respecto a los parámetros físicos obtenidos mediante simulación numérica [6]. En este caso se recurre a una

resolución basada en el método de los elementos finitos con un operador de Taylor Galerkin bidimensional de aguas poco profundas [4], [5].

En el estudio de la propagación de crecidas en ríos o canales abiertos se utilizan frecuentemente obstáculos circulares en la descripción del dominio. Una correcta representación espacial es relevante para la solución del problema de control de crecidas por medio de la solución adjunta o mediante la construcción de la superficie de respuesta [1], [3].

En este trabajo se realizan simulaciones de un canal rectangular con un obstáculo cilíndrico colocado internamente para distintos valores del coeficiente de Chézy, con el objeto de presentar los funcionales (instantáneos y promedios de alturas y velocidades), las superficies de respuesta y las curvas de sensibilidad.

2. Fundamentos

2.1. Enfoque basado en Taylor Galerkin

En el esquema de Taylor Galerkin, la resolución espacial se realiza con un esquema de residuos ponderados o de Galerkin y el avance temporal por medio de un Taylor basado en el conocimiento de las matrices Jacobianas que corresponde a las proyecciones de los flujos en las dos coordenadas cartesianas ortogonales.

Si se expresa el sistema diferencial de las ecuaciones de aguas poco profundas en forma conservativa

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial X_i} - \frac{\partial Rd_i}{\partial X_i} = R_s, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$U(h, p, q)$, vector de incógnitas nodales

F_i , vector de Flujos convectivos en las direcciones x e y , $i = 1, 2$

Rd_i , vector de términos difusivos $i = 1, 2$ debido a los esfuerzos viscosos

R_s , vector de términos fuente (términos de variaciones topográficas y de fricción)

Los flujos en las dos direcciones (X e Y) y el término fuente se pueden escribir en forma explícita:

$$F_1 = \left(p, \frac{p^2}{h} + g \frac{h^2}{2}, \frac{pq}{h} \right)^T \quad (2)$$

$$F_2 = \left(q, \frac{pq}{h}, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right)^T \quad (3)$$

$$R_s = \left(0, -gh(S_0^x - S_f^x), -gh(S_0^y - S_f^y) \right)^T \quad (4)$$

H , Profundidad de agua, p flujo de descarga en la dirección x , q flujo de descarga en la dirección y

$(S_0^x - S_f^x)$, Pendiente topográfica en la dirección x menos la pendiente de fricción en la dirección x

$(S_0^y - S_f^y)$, Pendiente topográfica en la dirección y y menos pendiente de fricción en la dirección y .

En donde la pendiente de fricción va a estar definida incorporado el factor C de Chézy en la forma

$$S_f^x = \frac{p \sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 h^3}, \quad S_f^y = \frac{q \sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 h^3} \quad (5)$$

Para facilitar el avance se recurre a una secuencia de dos semi-pasos de avance temporal para los que la solución del primero es condición inicial del segundo.

Primer avance temporal

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(R_s + \frac{\partial Rd_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_{(t_n)} \quad (6)$$

Segundo avance temporal

$$U^{n+1} = U^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial Rd_i}{\partial x_i} - R_s \right)_{\left(t_{n+\frac{1}{2}} \right)} \quad (7)$$

2.2. Sensibilidades del sistema

Si se define la sensibilidad de la respuesta del sistema, $S(x)$ como

$$S(x) = \frac{\delta y}{\delta x}(x) \quad (8)$$

En la que δy es la variación de la respuesta debido a una variación δx de los parámetros de control del sistema. Se puede obtener una relación funcional entre la respuesta estudiada y algunos parámetros de control del sistema de interés de la forma

$$y = f(x)\beta + \epsilon, \quad (9)$$

donde x es un vector que representa los parámetros de control, y representa la salida del modelo, β es un vector de coeficientes de regresión, $f(x)$ es el modelo propuesto y ϵ es el error del modelo. Una forma de estimar la superficie $f(x)$ es mediante la utilización del método RSM, que es un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas basadas en el concepto de regresión lineal de variable multidimensional. Otra forma en la que se puede obtener dicha superficie es realizando simulaciones numéricas de la respuesta basadas en la metodología de elementos finitos para distintos valores de los parámetros x , los que se interpolan con el fin de obtener la relación funcional buscada. Las sensibilidades se estiman como las derivadas de la función respuesta respecto a x .

3. Metodología

Se realizan las simulaciones numéricas mediante la técnica de Taylor Galerkin para un canal rectangular densificado con una isla interpuesta en el centro geométrico.

Los resultados de estas simulaciones arrojan los valores de $U=(h, p, q)$, vector de incógnitas nodales, donde h , es la profundidad de agua, p el flujo de descarga en la dirección x (longitudinal) y q flujo de descarga en la dirección y (transversal).

Si se define P como la cantidad de movimiento en la dirección longitudinal, q como la cantidad de movimiento en la dirección transversal, h como la distribución de alturas y t el tiempo, se tiene:

Condiciones de contorno de entrada,

$$\begin{aligned} P(0, y, t) &= 0.716 + \theta \operatorname{sech}^2[0.03(t - 120)] \\ q(0, y, t) &= 0.0 \\ h(0, y, t) &= 2.0 \end{aligned} \quad (10)$$

θ : Factor de amplificación de la cantidad de movimiento longitudinal en el pico de crecida

Condiciones de borde de salida,

$$\begin{aligned} h(Lx, y, t) &= 2.0 \text{ m} \\ q(0, y, t) &= 0.0 \text{ m} \end{aligned} \quad (11)$$

Condiciones de borde laterales. Flujos normales al contorno lateral cero ($y = Ly$). Regiones que no se consideran penetrables

$$q(x, Ly, t) = 0.0 \text{ m} \quad (12)$$

Condición inicial de lago quieto

$$\begin{aligned} q(x, y, 0) &= 0.0 \text{ m} \\ p(x, y, 0) &= 0.0 \text{ m} \\ h(x, y, 0) &= 2.0 \text{ m} \end{aligned} \quad (13)$$

Pendientes longitudinales y transversales

$$S_0^x = 0.00001, \quad S_0^y = 0.0 \quad (14)$$

En la entrada se supone una condición de contorno de entrada (de la crecida) similar a una curva de Gauss cuya propagación temporal y espacial es de interés.

Las hipótesis comunes para los casos simulados son: Canal rectangular ($Lx = 5000\text{m}$, $Ly = 1000\text{ m}$). Donde Lx es la longitud del canal y Ly es el ancho. Si se define p como la cantidad de movimiento en la dirección longitudinal, q como la cantidad de movimiento en la dirección transversal, h como la distribución de las alturas y t el tiempo, se tiene las siguientes condiciones de contorno de entrada:

$$\begin{aligned} P(0, y, t) &= 0.716 + \theta \operatorname{sech}^2[0.03(t - 120)] \\ q(0, y, t) &= 0.0 \\ h(0, y, t) &= 2.0. \end{aligned} \quad (11)$$

donde θ es el factor de amplificación de la cantidad de movimiento en la entrada del canal. Condiciones de borde de salida:

$$\begin{aligned} h(Lx, y, t) &= 2.0 \text{ m} \\ q(0, y, t) &= 0.0 \text{ m} \end{aligned} \quad (12)$$

Condiciones de borde laterales. Flujos normales al contorno lateral cero ($y = Ly$). Regiones que no se consideran penetrables.

$$q(x, Ly, t) = 0.0 \text{ m} \quad (13)$$

Condición inicial de lago quieto

$$\begin{aligned} q(x, y, 0) &= 0.0 \text{ m} \\ p(x, Ly, t) &= 0.0 \text{ m} \\ h(x, y, 0) &= 2.0\text{m} \end{aligned} \quad (14)$$

Pendientes longitudinales

$$\begin{aligned} S_0^x &= 0.00001 \\ S_0^y &= 0.0 \end{aligned} \quad (15)$$

Coefficiente de resistencia de Chézy

$$C = 80 \frac{m^{0.5}}{s} \quad (16)$$

En la triangulación realizada que representa a la subdivisión del dominio en elementos finitos se puede ver la simetría radial cerca del obstáculo circular y la densificación alrededor de los bordes laterales

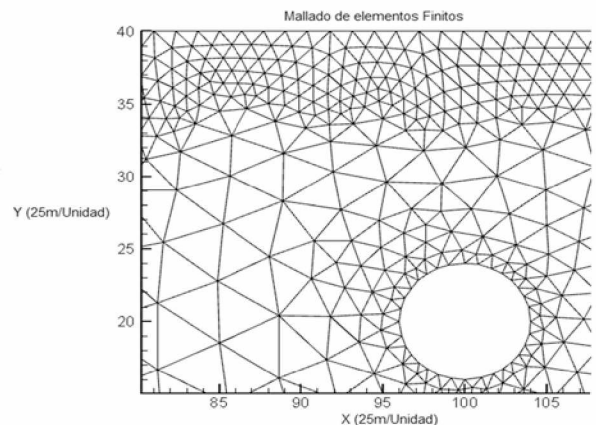


Figura 1: Malla de elementos finitos o triangulación del dominio de resolución del campo de velocidades y alturas.

4. Resultados

Se realizaron simulaciones en un canal rectangular con obstáculo circular interpuesto para analizar el efecto en el flujo de una isla. Se toma como respuesta el funcional de altura instantáneo que es la variable que mejor representa la propagación de crecida. Se considera como entrada del sistema la amplitud de llegada de la onda en el contorno de llegada al cauce para representar la incidencia de diversas crecidas con distintas intensidades. Mediante el análisis propuesto de sensibilidad se cuantifico la importancia de los parámetros de resistencia C de Chezy y la coordenada de avance longitudinal en la línea media del canal. El coeficiente de Chezy es la variable más íntimamente ligada con un flujo donde son preponderantes las fuerzas gravitatorias. Mientras que la coordenada de avance longitudinal permite ubicar el punto óptimo de control.

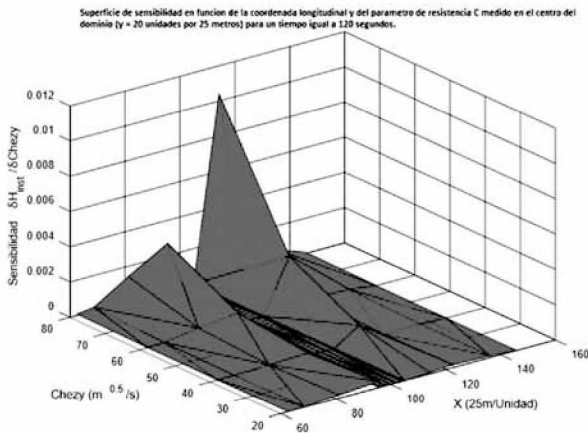


Figura 2: Superficies de nivel de la sensibilidad correspondiente a las alturas instantáneas en función del número de Chezy y de la coordenada de avance de la onda longitudinal medido en la línea media y en el tiempo correspondiente a 120 segundos.

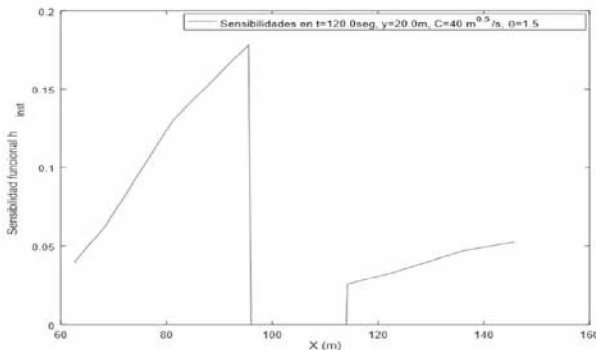


Figura 3: Sensibilidades del funcional altura instantáneo en la línea media en el canal densificado con isla $C = 40 \frac{m^{0.5}}{s}$, $\theta = 1.5$ cuando se varía la distancia longitudinal.

De las simulaciones realizadas se desprende que la sensibilidad de las alturas instantáneas respecto a la coordenada longitudinal de avance de la onda de crecida presenta un valor máximo aguas arriba en las inmediaciones de la isla. Aguas abajo, cuando la resistencia es pequeña ($C = 80$) las sensibilidades son máximas cerca de la sección de salida.

5. Conclusiones

Se predice que las sensibilidades máximas del funcional instantáneo de alturas respecto a la coordenada longitudinal medido en la línea media del canal se encuentran cerca de la isla para el caso más convencional ($C = 80$). Además se recalca que para aguas abajo los picos de sensibilidad se producen cerca de la sección de salida cuanto mayor es la fricción introducida. La relevancia de estos resultados radica en que, en base a ellos, es posible ubicar el punto óptimo de control.

6. Agradecimientos

Al CRCN (Centro Regional de Ciencias Nucleares, Nordeste, Brasil) y al Prof. Marcelo Santana CRCN por su colaboración en la utilización de los clusters de dicho Centro.

7. Referencias

Heniche M., Secretan Y., Baudreau P., Leclerc M., "A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries", *Advances in Water Resources*, Vol. 23, pp. 359-372, 2000.

Katapodes, D. and Sanders B. F. "Active Flood Hazard Mitigation. II Omnidirectional Wave Control", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, pp. 1071-1083, 1999.

Sanders, B. F., Katapodes, N. D., "Adjoint Sensitivity Analysis for Shallow - Water Wave Control", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 9, pp. 909-919, 2000.

Roig, B., "One-Step Taylor Galerkin Methods for convection diffusion problems", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 204, pp. 95-101, 2007.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. 6th Ed., Vol. 3, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.

Khury A. I., Mkhopadyay, "Advanced Review", Vol. 2, *Advanced Review in Computer Statistics*, Ed. John Whyley and Sons, 2010.

Cacuci Dan G., "Sensitivity and Uncertainly Analysis. Theory". Vol 1, Chapman and Hall, 2003.

Bradley N., Phd Thesis, "The response surface Methodology" *Computer Science*, 2007.