

# Simulación numérica de las crecidas en ríos y canales abiertos utilizando el método de los elementos finitos de Taylor Galerkin 2D

## Resumen

Se trata el problema de las inundaciones recurriendo al uso de simulación por computadora y la realización de experiencias en un laboratorio de hidráulica. Se harán pruebas numéricas para mostrar la bondad de la resolución del problema directo para el caso de la onda solitaria, rotura de presas y tratamiento de los términos fuentes como Coriolis y de viento. En todos los casos el programa da muy buenos resultados comparados con aquellos de los artículos relevantes publicados hasta el momento. Se mostrará la incidencia de la densidad de las mallas de elementos finitos y del incremento temporal en el pico de la crecida máxima. Por último se describirán las líneas de trabajo en que se está actuando.

Palabras claves: Método de los Elementos Finitos, Taylor-Galerkin, condiciones de borde móviles, control de crecidas en ríos y canales abiertos

## Introducción

Las inundaciones provocan daños humanos y materiales por lo cual es de especial relevancia estudiar el fenómeno de manera de proponer

soluciones que controlen o alivien dichos efectos en particular en zonas urbanas (Cozzolino, et al, 2015). Se propone realizar programas computacionales que representen las soluciones con cauce fijo y frontera móvil (Heniche et al, 2000) para poder efectuar el control de crecidas y el diseño de estructuras aliviadoras. Existen diversos tipos de estructuras de regulación de las crecidas, entre ellas son conocidas las obras de vertedero lateral y de desvío de ríos. La construcción de vertederos es una obra masiva que requiere una gran inversión en dinero y en tiempo de construcción. También éstos influyen en las condiciones del medio ambiente pues provocan fuertes cambios climáticos que deben ser prevenidos e incorporados en las condiciones de diseño. Por otro lado, el desvío y cambio de dimensiones de los ríos para hacer que las descargas sean más suaves es una solución difícil de implementar. Normalmente existe una población alrededor de los ríos y dicha población puede ser perjudicada por las obras. En este caso se opta por la primera alternativa que consiste en crear una política de control de

inundaciones mediante la ubicación y operación optimizada de vertederos laterales (Sanders, Katapodes, 2000).

Dicha política de control estará basada en la resolución del problema de aguas poco profundas bidimensionales con contornos móviles y cauce fijo aplicable a cualquier dominio geométrico, para representar casos reales de aplicación.

Se mostrará que los resultados numéricos de la aplicación de Taylor Galerkin concuerdan con los de la literatura publicada en el tema y se indicarán los pasos a seguir para generar un programa que resuelva la propagación de crecidas.

## Simulación Numérica mediante Taylor Galerkin 2D

Se utilizan tres ecuaciones físicas independientes de conservación para computar tres variables independientes que son las alturas y componentes de las velocidades.

Ecuación Vectorial de la Conservación de la Cantidad de Movimiento y de Masa.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial X_i} - \frac{\partial R_{di}}{\partial X_i} = R_s, i = 1, 2 \quad (1)$$

donde,

$U(h, p, q)$ : Vector de incógnitas,  $R_{di}$ : Vector de términos difusivos,  $R_s$ : Vector de términos fuente,  $F_i$ : Vector de Flujos convectivos.

$R_s, F_1$  y  $F_2$  se definen como,

$$F_1 = \left( p, \frac{p^2}{h} + g \frac{h^2}{2}, \frac{p q}{h} \right)^T \quad (2)$$

$$F_2 = \left( q, \frac{p q}{h}, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right)^T \quad (3)$$

$$R_s = (0, -g h(S^x_\sigma - S^x_f), -g h(S^y_\sigma - S^y_f))^T \quad (4)$$

donde,

$h$ : Profundidad de agua,  $p$ : Flujo de descarga en la dirección  $x$ ,  $q$ : Flujo de descarga en la dirección  $y$ ,  $S^x_\sigma, S^x_f$ : Pendiente topográfica y de fricción en la dirección  $x$ ,  $S^y_\sigma, S^y_f$ : Pendiente topográfica y de fricción en la dirección  $y$ .

Las ecuaciones (2 y 3) representan las componentes de los flujos en las direcciones  $x$  e  $y$ . La ecuación (4) indica los términos fuentes de las ecuaciones poco profundas 2D. Estas ecuaciones se resuelven por el método de los elementos finitos utilizando el enfoque de Taylor Galerkin.

Dicha metodología se basa en la resolución numérica en el dominio espacial por Galerkin y en el avance temporal por medio de un desarrollo de Taylor hasta segundo orden. La aplicación de este método conduce al siguiente sistema iterativo basado en el algoritmo de multipasos (Zienkiewicz, Taylor, 2005).

Primer avance temporal,

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t \left( R_s + \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_{(t_n)} \quad (5)$$

Segundo avance temporal,

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i} - R_s \right)_{\left( t_{n+\frac{1}{2}} \right)} \quad (6)$$

El segundo avance temporal se resuelve en la forma (Hirsh, 1988),

$$M \dot{U} = RHS(U) \quad (7)$$

$M$ : es la matriz de masa global del sistema,  $\dot{U}$  es el vector de incógnitas nodales y  $RHS(U)$  es el término independiente.

El sistema diferencial dado por la ecuación (7) se resuelve explícitamente por la ecuación (8).

$$M_L U_{k+1}^{n+1} = RHS(U^n) - (M - M_L) U_k^{n+1} \quad k = 0, N \quad (8)$$

$$RHS(U^n) = M U^n + R_\infty + S_\tau \quad (9)$$

$M_L$ : Matriz concentrada,  $M$ : Matriz de masa global,  $R_\infty + S_\tau$ : Integral de superficie de los términos viscosos de los flujos e integrales de línea de los términos fuentes. La ecuación (8) da un algoritmo explícito rápidamente convergente en máximo 5 iteraciones.

### Ventajas y desventajas de la propuesta computacional

El esquema computacional propuesto es del tipo explícito, en el cual el sistema de ecuaciones lineales es desacoplado y se pueden despejar las incógnitas sin resolver el sistema lineal en su totalidad. Esto hace que la resolución sea más simple de implementar. En cada paso temporal el sistema de ecuaciones se resuelve con una matriz diagonal concentrada y no requiere de su resolución implícita (matriz principal acoplada y densificada) que sería bastante más complicada de implementar.

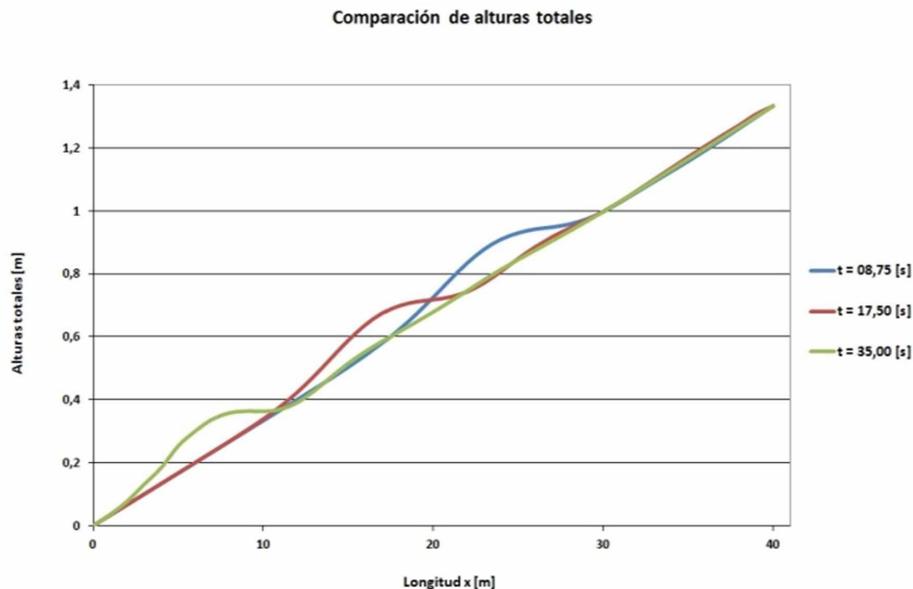
La utilización de la metodología de los elementos finitos es favorable ya que permite la modelización de dominios irregulares y condiciones de borde difíciles de introducir en otras metodologías.

En el caso de problemas de control, se modeliza tanto la solución directa como la inversa con un solo programa en elementos finitos, metodología que, hasta donde es conocido por los autores, no se ha aplicado. En la literatura (Sanders, Katapodes, 2000), generalmente, la modelización computacional del problema directo se realiza con elementos finitos y el problema de control se modeliza con diferencias finitas.

La dificultad en la aplicación de Taylor Galerkin está en la necesidad de introducir la difusión artificial, equivalente a la utilización de la técnica de limitadores de flujo aplicada cuando se utiliza el método de diferencias finitas. Como desventaja, el paso temporal que resulta necesario para el avance de la onda en el tiempo queda muy limitado y necesita gran cantidad de memoria para resolver eficazmente el problema (Pacheco, 2011).

### Validación de la solución del problema directo

Se realizaron diversos experimentos numéricos para validar distintos aspectos de la solución obtenida por Taylor Galerkin. En primer lugar, se trataron dos experiencias numéricas fundamentales. Propagación de una onda de choque y propagación de una onda solitaria (soliton). En ambos casos se consideró un canal rectangular con pendiente uniforme topográfica y cauce fijo. La pendiente uniforme se implementó considerando una distribución de fondo de cauce que varía linealmente en forma bidimensional (Bates, 2003).



*Fig. 1: Propagación de la onda solitaria*

En la Fig. 1 se pueden observar los resultados de la propagación de la onda solitaria, en los que la onda está superpuesta, en diversos instantes de tiempo, a la distribución topográfica de la variación de las alturas.

Se simuló la propagación de una onda dinámica o “soliton” que entra a contrapendiente y choca elásticamente contra el borde cerrado izquierdo. Los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta coincidieron con aquellos dados por la literatura (Zienkiewicz, Taylor, 2005).

Para la propagación de una onda de choque (Fig. 2), se comprobó la validez de la solución del programa propuesto mediante la comparación con los resultados de la literatura numérica publicada hasta el momento (Löhner, Morgan, Zienkiewicz, 1984).

En la Fig. 2 se observa que se captura la atenuación de la onda de choque como consecuencia de la introducción numérica de una viscosidad artificial (se va suavizando la discontinuidad original en el tiempo). Este ensayo numérico es uno de los más difíciles de pasar porque requiere de la introducción de una gran difusión artificial.

Ambos resultados numéricos se tratarán de comprobar experimentalmente en el laboratorio de hidráulica.

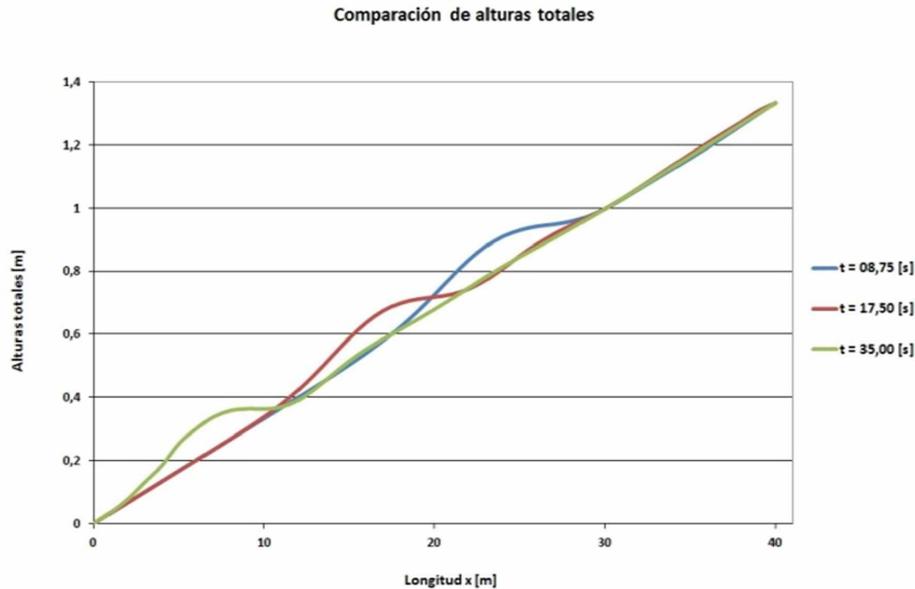


Fig. 2: Propagación de la onda de choque

Además de estos ensayos numéricos, se hicieron otros que son relevantes para comprobar la introducción de los términos fuente en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, la introducción del efecto de resistencia de Manning, del efecto de Coriolis (Awruch, 1983), de la introducción de la fuerza del viento en la superficie libre y de las fuerzas viscosas (Varella, 1997) (ver Fig. 3).

Se puede apreciar que para cauces de dimensión apreciable, como el de 150 km, la incidencia de la fuerza de Coriolis y de vientos es muy importante debido a los cambios de latitud del canal o río considerado.

Además se hicieron otras pruebas numéricas densificando la red de elementos finitos con diversos incrementos temporales y espaciales, para establecer la influencia de la topología de la red en la adecuación de los resultados a los comportamientos físicos conocidos del fenómeno.

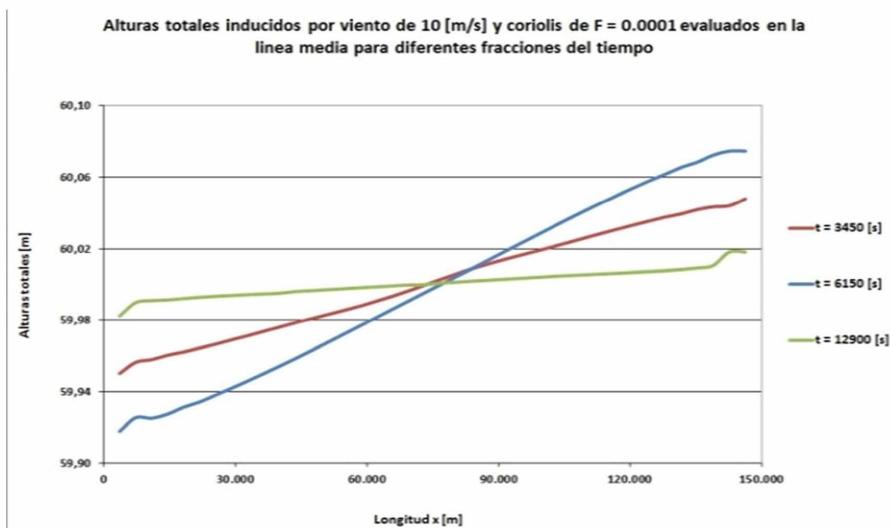


Fig. 3: Incidencia de los términos fuentes en las alturas

Se ensayaron dos mallas de elementos finitos para el avance de una onda del tipo solitón con los datos:  $T = 150s$ ,  $DT = 1s$ , Malla 40,4 m., versus:  $T = 150s$ ,  $DT = 0.00125s$ . Malla 320, 32 m, lo cual produjo los resultados indicados en las figuras 4 y 5, en los que se muestra que para un avance temporal 8000 veces menor a 1 s, se reproduce mejor la propagación de la onda, es decir, se llega a la situación original en un tiempo mayor. Esto es, representa mejor el problema analizado, según se muestra en la tabla 1.

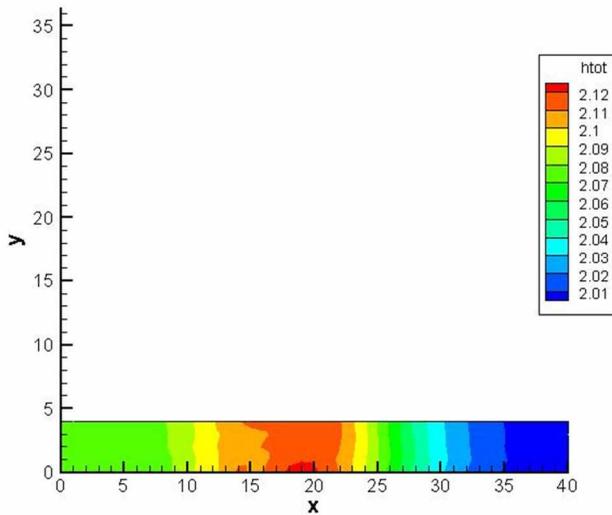


Fig.4: Distribución de las alturas en una malla de 40 x 4 divisiones y un paso temporal de 1s

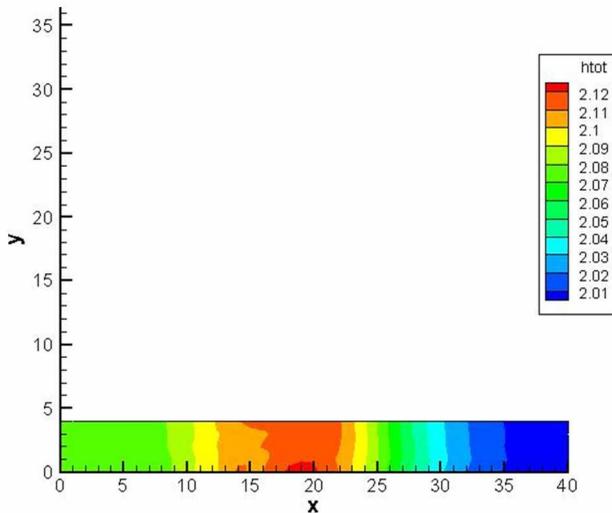


Fig. 5: Distribución de las alturas en una malla de 320 x 32 divisiones y un paso temporal de 1:8000 s

Tiempos (s)	PICO MAXIMO DE ALTURAS (m)	
	Dt = 1 s Malla (40 X 4)	Dt= 0.00125 s Malla (320 X 32)
20 s	2m	2m
100 s	2,22 m	2.3m
150 s	2,12m	2,24m
212 s	2m	2.18m
275 s	2m	2,18 m
337 s	2m	2.015m

Tabla 1: Comparación de los picos máximos de las alturas en distintos tiempos con incrementos temporales y densidades de mallas diferentes

### Conclusiones

Se realizó la simulación numérica de una onda de crecida en un canal rectangular de cauce fijo y pendiente uniforme mediante el método de Taylor Galerkin en 2D, aplicando las ecuaciones de aguas poco profundas.

Se hicieron pruebas numéricas para mostrar la bondad de la resolución del problema directo para el caso de la onda solitaria, rotura de presas y tratamiento de los términos fuentes como Coriolis y de viento. En estas experiencias se muestra que el programa representa muy bien a la propagación de la onda solitaria, a la rotura de presas y a los términos fuentes de viento, Coriolis, de resistencia y topográficos.

Se mostró la incidencia de la densidad de las mallas de elementos finitos y temporal en el pico de la crecida máxima y algunos aspectos de la convergencia en la resolución explícita del método de Taylor Galerkin. Para incrementos temporales pequeños y malla densificada el programa representa muy bien la propagación de ondas mostrando que en ambos casos se llega muy bien a la situación del canal original de altura 2 m.

Por un efecto de difusión numérica, para un incremento temporal apreciable la onda no se llega a la situación final más rápidamente.

Se analizó en detalle la implementación del método, mostrándose que en cada paso temporal el sistema de ecuaciones se resuelve con una matriz diagonal concentrada y no requiere de su resolución implícita (matriz principal acoplada y densificada) que sería bastante más complicada. Es decir que la resolución explícita es simple de implementar.

### Lineas de trabajo

1. Se está desarrollando un código para la optimización y control de la propagación de las crecidas (Sanders, Katapodes, 2000).
2. Se está tratando de hacer un ajuste a crecidas de ríos para conseguir

una condición de borde real en la entrada de la crecida (Fatorelli, Fernandez, 2011).

Se tratarán de ensayar las situaciones anteriores en laboratorio de hidráulica.

Se intentará incluir contornos móviles adicionalmente al cauce fijo considerado (Heniche, et al, 2000).

Se paralelizará el programa para poder implementarlo en un “cluster” bien equipado para mejorar los tiempos de procesamiento para problemas complejos (Pacheco, 2011)

#### Referencias

- Awruch, A. M., 1983. Modelos Numéricos em Hidrodinâmica e fenômenos de Transporte Usando Método os Elementos Teses de Doutorado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- Bates P. D., 2003. “Optimal use of high-resolution topographic data in flood inundation models”, *Hydrological Processes*, Vol. 17, pp. 537-557.
- Cozzolino, L et al, 2015., “ The Analytic solution of the Shallow Water equations with partially open sluice Gates: The dam break problem”, *Advances in Water Resources*, Vol. 80, pp. 90-102, 2015.
- Fattorelli S., Fernandez P. C., 2011, *Diseño Hidrológico, Segunda Edición digital*, INA publicada en la biblioteca virtual de la Wasa GN WaterAssesment&Advisory Global Network,
- Heniche M., Secretan Y., Baudreau P., Leclerc M., 2000, “A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries”, *Advances in Water Resources*, Vol. 23, pp. 359-372.
- Hirsh, C., 1988, *Numerical Computation of Internal and External flows*, Vol 1: *Fundamentals of Numerical Discretizations*, John While and Sons .
- Löhner, R., Morgan K., Zienkiewicz O. C., 1984, “The Solution of Non Linear Hyperbolic Equation Systems by the Finite Element Method”, Vol. 4, pp. 1043-1063.
- Pacheco P., 2011 *An Introduction to Parallel Programming - Peter Pacheco - Publisher: Morgan Kaufmann; 1 edition - ISBN-10: 0123742609 ISBN-13: 978-0123742605.*
- Sanders, B. F., Katapodes, N. D., 2000, “Adjoint Sensitivity Analysis for Shallow – Water Wave Control”, *Journal of Engineeering Mechanichs*”, Vol. 126, No. 9, pp. 909-919.
- Varella, D. M., 1997, *Modelos Formulação Geral Explícita para a Solução de Escoamentos em Aguas Rasas. Teses de Mestrado em Engenharia Oceanica*, Universidade do Rio Grande, Brasil,
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2005, *The Finite Element Method*. 6 th Ed., Vol. 3, Butterworth-Heinemann, Oxford.