



## Alejandro Gronsakis

Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Unidad de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la Marina Mercante (UdeMM).

# Análisis del error en un código para el estudio de escurrimientos con grilla regular no uniforme

## 1. Objetivo

El objetivo en este artículo consiste en analizar el comportamiento del código de cálculo *Incompact3d* (el cual viene siendo descrito y utilizado en números anteriores de la revista *Atenea*) en cuanto al error causado por la densificación de la malla de cálculo en una dirección.

En la primera parte del trabajo haremos una breve descripción del problema de los vórtices de Taylor-Green, siendo la configuración de escurrimiento elegida para realizar la validación del código. En la segunda parte haremos un estudio sobre el comportamiento del error para el caso de utilizar la densificación en la dirección ya implementada en trabajos previos (Gronsakis et al., 2013).

## 2. Vórtices de Taylor Green

El problema de los vórtices de Taylor-Green en dos dimensiones es una herramienta que puede ser utilizada para la validación de códigos dado que se trata de un problema teórico que dispone de una solución analítica conocida.

Taylor y Green utilizaron una expansión

asintótica en el tiempo para estudiar la evolución temporal de un flujo incompresible. En dos dimensiones, para el caso de un dominio cuadrado de tamaño  $Lx = Ly = l$  con condiciones de borde periódicas o de deslizamiento libre, los vórtices surgen dadas las condiciones iniciales para tiempo  $t = 0$ :

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

$$v(x, y, 0) = -\cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

donde  $u = u(x, y, t)$  y  $v = v(x, y, t)$  son las componentes de la velocidad en la dirección  $x$  e  $y$  respectivamente. La solución analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes para este problema se escribe como:

$$u(x, y, t) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) e^{-4\pi^2 \nu t}$$

$$v(x, y, t) = -\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-4\pi^2 \nu t}$$

En las figuras 4.1 y 4.2 se representan las velocidades solución para la dirección  $x$  (horizontal) y para la dirección  $y$  respectivamente, para un tiempo  $t = 0.5$ . Se puede de aquí deducir que no existe flujo entrante o saliente al dominio y por consiguiente el valor de la velocidad es cero en los bordes del dominio para la componente normal a estos.

En la figura 4.3 se muestra la componente  $z$  de la vorticidad correspondiente a los campos de velocidades ilustrados anteriormente.

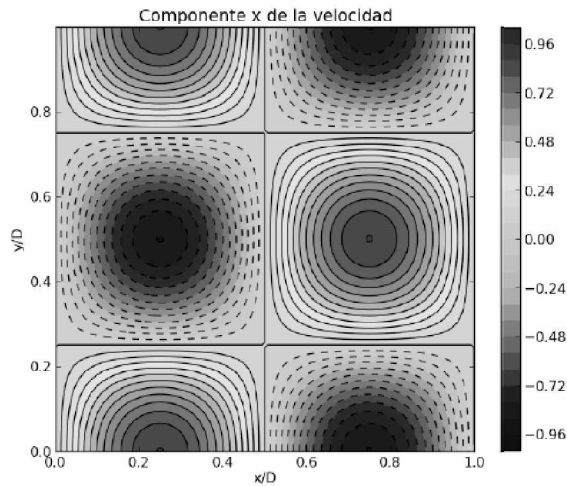


Figura 4.1: Isolíneas de la componente de la velocidad en la dirección  $x$ , con  $L_x = L_y = 1$ ,  $t = 0,5$ . (Solución analítica)

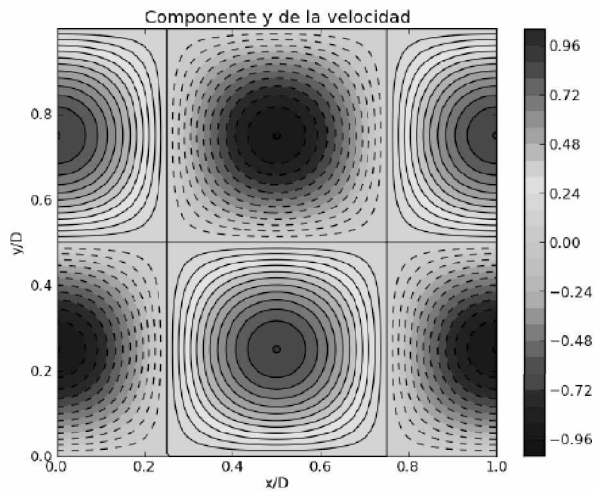


Figura 4.2: Isolíneas de la componente de la velocidad en la dirección  $y$ , con  $L_x = L_y = 1$ ,  $t = 0,5$ . (Solución analítica)

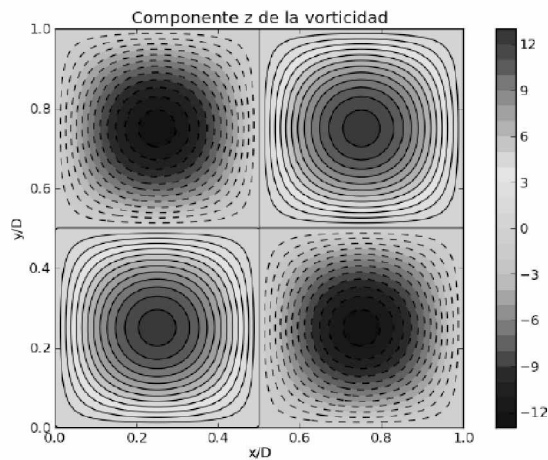


Figura 4.3: Isolíneas de la componente de la velocidad en la dirección  $z$ , con  $L_x = L_y = 1$ ,  $t = 0,5$ . (Solución analítica)

### 3. Estudio y validación del código para la densificación en una dirección

Para poder realizar el análisis y la validación del código consideraremos distintas mediciones de error. La figura 4.4 muestra el cuadrado centrado en el dominio discretizado sobre el cual mediremos el error. La razón por la cual la medición del error se lleva a cabo sobre este cuadrado y no sobre el dominio completo reside en el hecho de que la densificación concentra los puntos

en el centro del dominio. Vamos a definir y utilizar tres variantes distintas para medir el error. La definición de error que utilizaremos sera la del error cuadrático medio en el cuadrado, definido como:

$$Error_I = \frac{1}{m_x} \frac{1}{m_y} \sqrt{\sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} (u_c(i, j) - u_a(i, j))^2}$$

donde  $m_x$  y  $m_y$  son los números de puntos contenidos dentro del cuadrado en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente,  $u_c$  es una de las componentes de la velocidad calculada con el programa y  $u_a$  es la misma componente pero obtenida mediante la solución analítica de Taylor-Green.

La segunda definición de error que utilizaremos es la del error cuadrático medio sobre línea. Este surge de utilizar la definición:

$$Error_{II} = \frac{1}{m_y} \sqrt{\sum_{j=1}^{m_y} (u_c(n_x/2, j) - u_a(n_x/2, j))^2}$$

La figura 4.5 muestra la línea sobre la cual se medirá el error de línea para el caso de la velocidad  $v$  en caso de utilizar una grilla regular uniforme (no densificada), mientras que la figura 4.6 lo muestra para el caso de grilla densificada. Aquí se observa que al densificar es posible disponer

de un mayor numero de puntos dentro de la línea (lo mismo vale para el cuadrado). Por ultimo utilizaremos el máximo error local relativo dentro de la línea utilizada para calcular el error en línea. Esto es:

$$Error_{III} = \max \left| \frac{u_c(n_x/2, j) - u_a(n_x/2, j)}{u_a(n_x/2, j)} \right|$$

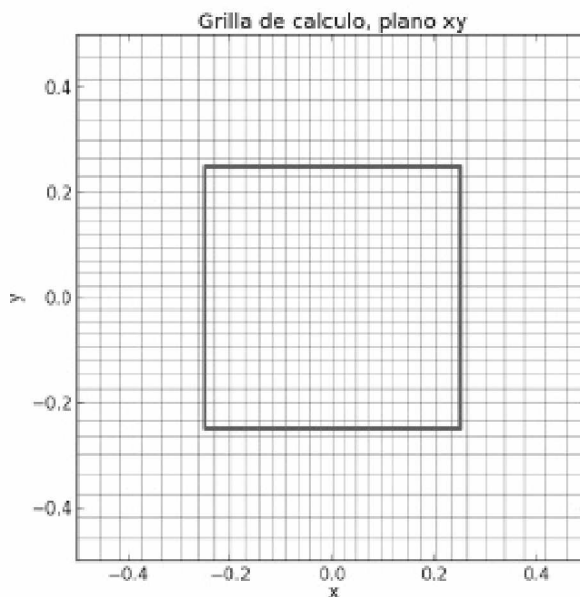


Figura 4.4: Cuadrado en el cual se hace la medición del  $Error_I$

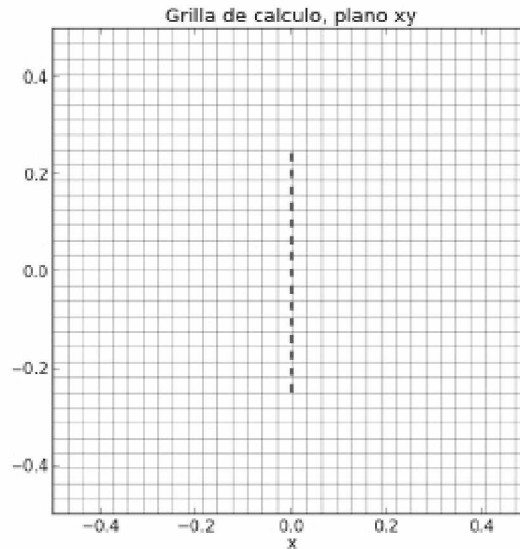


Figura 4.5: Grilla utilizada para el cálculo del error.  $n_x = n_y = 33$  y  $L_x = L_y = 1$ . con grilla regular.

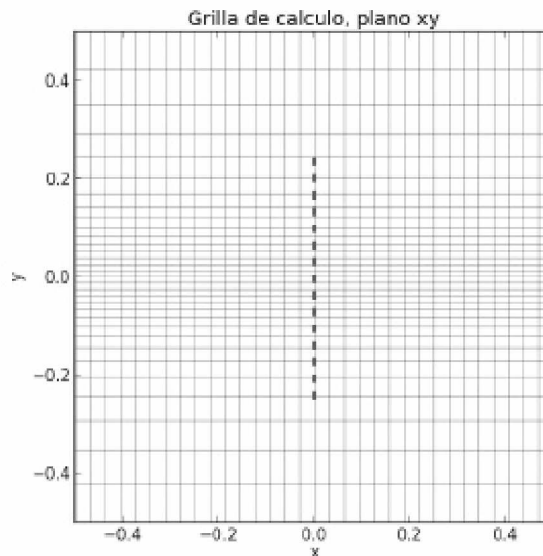


Figura 4.6: Grilla utilizada para el cálculo del error.  $n_x = n_y = 33$  y  $L_x = L_y = 1$ . con densificación en la dirección  $y$ .

#### 4. Análisis para la densificación en la dirección $y$

Para poder realizar nuestra validación y estudio del código en su estado original, simulamos la evolución del flujo desde tiempo  $t_0 = 0$  hasta  $t_1 = 0.5$  para poder obtener un valor del flujo en un estado de evolución que permita realizar las comparaciones con nuestro código pero no lo suficientemente avanzado para entrar en el régimen de inestabilidad característico del problema de Taylor-Green, utilizando un paso de tiempo lo suficientemente pequeño para asegurar el estricto cumplimiento de las condiciones de estabilidad. El paso de tiempo a utilizar es por lo tanto  $\Delta t = 0.00005$  de forma que los errores debidos a la discretización temporal puedan ser despreciados respecto a las discretizaciones espaciales. Si se utiliza el esquema temporal de Adams-Bashforth 2, entonces para el caso mas desfavorable en nuestros casos de estudio ( $n_x=n_y=129$ ) se tiene que  $\Delta t_{critico} = 0.00551$ . El dominio cuadrado computacional se discretiza en  $n_x \times n_y$  nodos de la malla, con  $n_x = n_y$ . El numero de Reynolds definido en este caso por  $Re=1/\nu$  es igual a  $1000$ . Fijando la cantidad de nodos de discretización del dominio por  $n_x=n_y=17$ ,  $n_x=n_y=33$ ,  $n_x=n_y=65$  y  $n_x=n_y=129$ , y variando el parámetro de densificación  $\beta_y$  se obtienen distintos cuadros de error; los mismos pueden observarse en la tesis de grado del Ing. Gustavo Bordon (Depto. Ing. Mecanica, Fiuba, 2014).

Vale la pena aclarar que a medida que  $\beta_y$  disminuye su valor, el grado de densificación aumenta, y por el contrario, cuando  $\beta_y$  aumenta su valor, el grado de densificación disminuye, siendo por consiguiente la grilla, para el limite  $\beta_y \rightarrow \infty$ , del tipo regular. Observando los cuadros se puede ver entonces que para grandes valores de  $\beta_y$  los datos de error son prácticamente coincidentes con los casos donde se utiliza grilla regular, lo cual verifica que la implementación tiene un comportamiento coherente con lo explicado anteriormente.

Si graficamos, por ejemplo, el comportamiento del error para el caso de  $n_x=n_y=33$  variando el parámetro de densificación  $\beta_y$  obtenemos las figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12 para cierto intervalo de densificación, las cuales representan los distintos valores para cada una de las definiciones de error que dimos anteriormente.

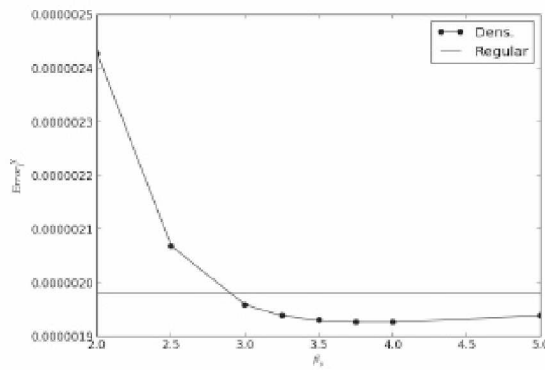


Figura 4.7: Error<sub>I</sub> de la componente x de la velocidad con densificación en la dirección y siendo .  $n_x = n_y = 33, L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

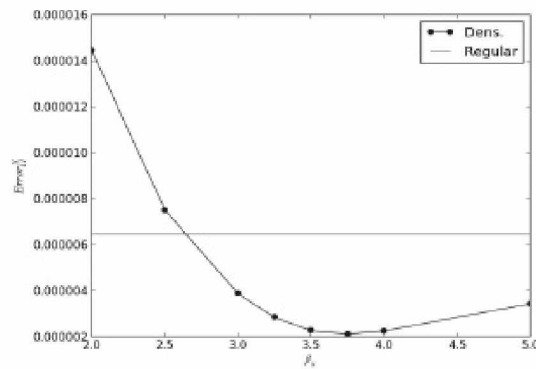


Figura 4.8: Error<sub>II</sub> de la componente x de la velocidad con densificación en la dirección y, siendo .  $n_x = n_y = 33, L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

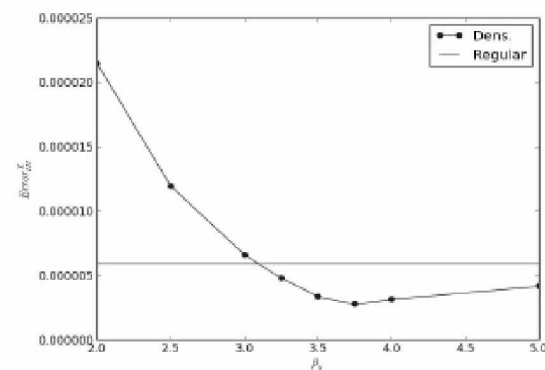


Figura 4.9: Error<sub>III</sub> de la componente x de la velocidad con densificación en la dirección y, siendo .  $n_x = n_y = 33, L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

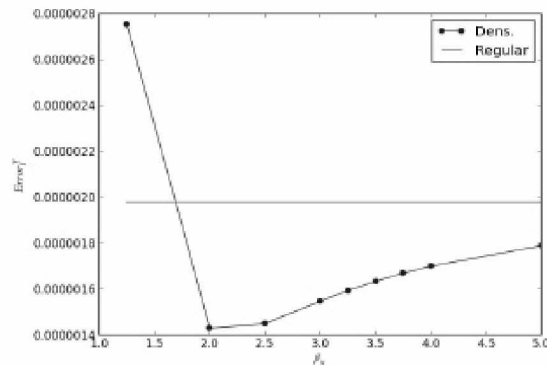


Figura 4.10: Error<sub>I</sub> de la componente y de la velocidad con densificación en la dirección y siendo .  $n_x = n_y = 33$ ,  $L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

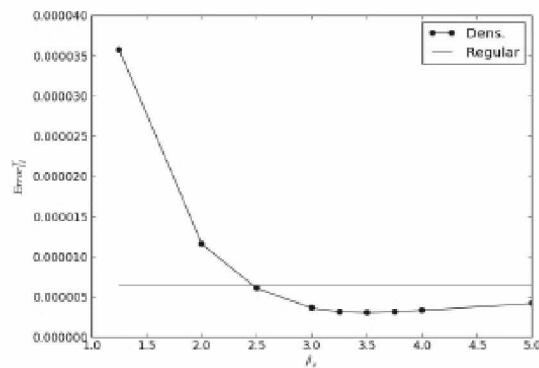


Figura 4.11: Error<sub>II</sub> de la componente y de la velocidad con densificación en la dirección y siendo .  $n_x = n_y = 33$ ,  $L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

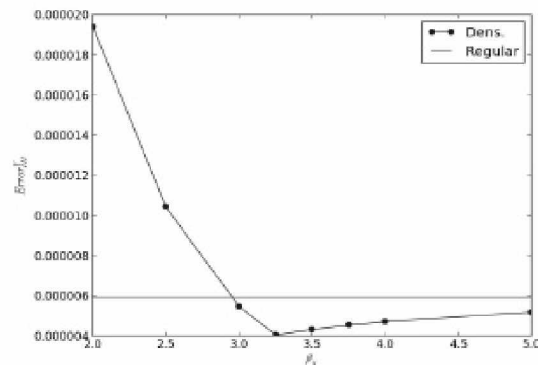


Figura 4.7: Error<sub>III</sub> de la componente y de la velocidad con densificación en la dirección y siendo .  $n_x = n_y = 33$ ,  $L_x = L_y = 1$  y  $t = 0,5$ .

Si examinamos la figura 4.10 se observa que utilizando la densificación el error es menor con respecto al caso de grilla regular a partir de aproximadamente  $\beta_y > 2$  encontrando su mínimo para algún valor de  $\beta_y$  entre 3 y 4 para luego tender nuevamente al error producido para el caso de grilla regular. El mínimo del error para las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se produce aproximadamente en  $\beta_y = 3.75$ . Para la figura 4.11 el error

mínimo corresponde aproximadamente a  $\beta_y = 3.5$  y para la figura 4.12 a  $\beta_y = 3.25$ . Entonces, si se consideran las figuras con sus correspondientes definiciones de error, el valor de  $\beta_y$  para el cual el error es menor al caso de grilla regular es aun mayor y por ende el grado de densificación es menor. En el caso, por ejemplo, en el que  $\beta_y = 2$ , podemos ver que manteniendo el tamaño del dominio constante (en este

caso  $L_x = L_y = 1$ ) y variando el numero de nodos (es decir, variando la resolución de la grilla), la variación de la densificación máxima que es posible obtener (dada por la relación  $\Delta y_{min} / \Delta y_{max}$ ) es muy baja. O sea, para los tres casos la densificación producirá una diferencia entre tamaños de  $\Delta y_{min}$  y  $\Delta y_{max}$  de 17 %.

En la figura 4.13 se puede ver la distribución de la diferencia entre los campos de la componente de la velocidad en la dirección  $y$  calculada y analítica elevada al cuadrado para el caso sin densificación. En la figura 4.14 se representa el caso correspondiente cuando se realiza una densificación. Se puede ver aquí para el caso densificado que si bien el orden del error es mas alto para los valores máximos que en el caso

de grilla regular, en el centro (que es donde se realiza la densificación) estos valores de error encuentran sus mínimos, como así lo muestra la figura 4.15, en la cual se representa la distribución del error local sobre una de las líneas centrales (ErrorII). En esta figura se muestra el error para dos grados distintos de densificación comparándolos a la vez con el caso de grilla regular. Se observa que para el caso de  $\beta y = 3.25$  el error es menor que para el caso de grilla regular en todo el intervalo de medida considerado, mientras que para el caso de  $\beta y = 2.00$  el error en los bordes es mayor que para el caso de grilla regular lo cual afectara entonces los cálculos de error para las otras definiciones.

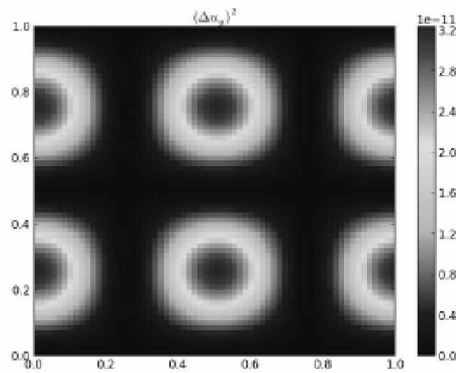


Figura 4.13: Cuadrado de la diferencia de campos de la componente  $y$  de la velocidad calculada con Incompact3d y analítica  $(u_{yc}(x, y) - v_a(x, y))^2$  utilizando una grilla regular.  $n_x = n_y = 65, L_x = L_y = 1, t = 0,5$ .

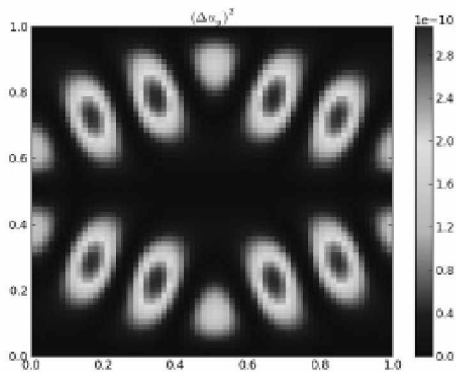


Figura 4.14: Cuadrado de la diferencia de campos de la componente  $y$  de la velocidad calculada con Incompact3d y analítica  $(u_{yc}(x, y) - v_a(x, y))^2$  utilizando una grilla densificada en la dirección  $y$  y con parámetro de densificación  $\beta y = 3,25$ .  $n_x = n_y = 65, L_x = L_y = 1, t = 0,5$ . Nótese que la escala, en comparación con la figura 4.13, es tal que representa valores un orden de magnitud mayor.

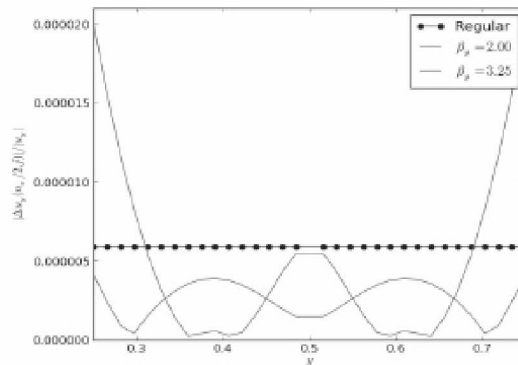


Figura 4.15: Comparación del error local ( $Error_m$ ) para dos grados distintos de densificación de grilla y grilla regular, donde  $n_x = n_y = 65$ ,  $L_x = L_y = 1$ . Se excluye el valor correspondiente a  $y = 0,5$  para así evitar la división por cero.

## 5. Conclusiones

En este trabajo hemos hecho validación y estudio del comportamiento del código Incompact3d para distintos grados de densificación de la malla cartesiana de discretización, utilizando como caso de estudio los vórtices de Taylor-Green. Podemos entonces concluir que:

- Si bien para cierto grado de densificación en una sola dirección se logra obtener un error menor que para el caso de grilla regular, el grado de densificación no es el que podría esperarse obtener dado que el mismo se encuentra aproximadamente por debajo del 20%;
- En trabajo futuro se procuraría efectuar densificación en las dos direcciones simultáneamente, esperando observar que el error logre ubicarse para algún rango  $(\beta_x, \beta_y)$  por debajo del obtenido utilizando una grilla regular, y asimismo evaluar la viabilidad en la implementación a través de la estimación de los tiempos de cálculo respectivos a la simulación con cada tipo de malla.