Ing. Ariel Galbiati

Ingeniero UTN, MBA UP, Director de la carrera de Ingeniería Industrial (UdeMM), Gerente de empresas, Docente Universitario, Director de Consultora especializada en Management & Marketing.

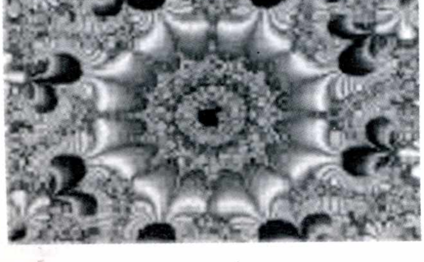
Geometría fractal, ciencia y belleza

ASTRACT

Existen claras diferencias entre lo que corresponde al mundo de la ciencia y al mundo del arte, pero en algunos casos los límites no se encuentran tan bien definidos y un ejemplo de esto es el caso de "los fractales".

Este término "fractal" que se puede traducir como interrumpido o quebrado fue introducido por Mandelbrot en la década del ´70

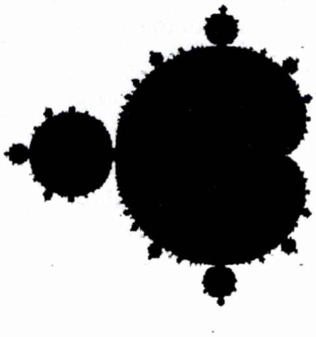
Se trata de estructuras en las cuales los detalles pequeños repiten a escala reducida las características globales de la estructura general un número infinito de veces, generando formaciones de gran belleza.



1. Introducción

Existen claras diferencias entre lo que corresponde al mundo de la ciencia y al mundo del arte, o al menos eso creemos, pero en algunos casos los límites no se encuentran tan bien definidos y un ejemplo de esto es el caso de "los fractales".

El término "fractal" deriva del latín "fractus", que se puede traducir como interrumpido, quebrado o irregular y fue introducido por el matemático Benoit Mandelbrot en la década del ´70.



Fractal de Mandelbrot

Los fractales son extrañas estructuras en las cuales los detalles pequeños repiten a escala reducida las características globales de la estructura general un número infinito de veces, de forma tal que cada pequeña porción del fractal puede ser vista como una réplica a escala reducida del todo.

Los fractales no tienen una "dimensión entera" como los objetos comunes del mundo cotidiano (uno , dos o tres) con los que tratamos habitualmente, sino valores no enteros como por ejemplo 1,26 , y esta característica "dimensión fraccionaria" fue determinante para su denominación.

En un sentido, podría decirse que los fractales son idealizaciones ya que los objetos reales no poseen una cantidad infinita de detalles, aunque presenten mayor o menor grado de complejidad.

Resulta bastante complejo expresar una definición general de los fractales ya que la variedad de estructuras fractales es muy amplia y diversa como para englobarlas a todas ellas en una generalización, pero todos los fractales tienen en común ser el producto de la repetición o iteración de un proceso geométrico elemental que genera una estructura final de una gran complejidad, en la cual cada porción de dicha estructura contiene la información necesaria para reproducirla por completo, y su dimensión fractal no es entera necesariamente.

Resulta así que los fractales pueden ser generados por un proceso iterativo, recursivo, capaz de producir estructuras "auto-similares" independientemente de una escala específica.

2. Características

Muchas configuraciones naturales tienen estructuras de tipo fractal, sin embargo, un fractal matemático es un objeto que tiene alguna/s de las siguientes características:

- Elevada irregularidad como para ser descripto en términos geométricos tradicionales
- Detalles en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Auto-similitud exacta o estadística (una parte representa al todo)
- Es posible definirlo en forma iterativa
- Su dimensión (dimensión de Hausdorff-Besicovitch) no es necesariamente entera

Existen estructuras u objetos de apariencia "fractal" (como ejemplos de la naturaleza podrían mencionarse nubes, montañas, vasos sanguíneos y costas) que no satisfacen ninguna de las anteriores propiedades en el sentido matemático estricto.

Desde el punto de vista de la ciencia, consiste en el estudio de conjuntos de puntos sobre los cuales es posible definir una dimensión fraccionaria que permite medir el grado de complejidad del conjunto, en el plano, el espacio e inclusive en dimensiones superiores.

Desde el punto de vista del arte, no puede dejar de observarse la hermosura de estas estructuras que demuestran al público no especializado en ciencias que hasta la matemática presenta belleza, o como dijera el poeta Fernando Pesoa "... el binomio de Newton es tan hermoso como la Venus de Milo, lo que pasa es que muy poca gente se da cuenta".

Los fractales constituyen uno de esos raros ejemplos en los que "mucha gente" puede darse cuenta de esa belleza matemática de la que habla el poeta.

En la geometría euclidiana, una figura geométrica se basa en rectas y curvas entre puntos, dibujables con regla y compás, en la fractal se comienza con una estructura cualquiera que luego de reducida y deformada (o no) , se repite un número indefinido de veces en lugares específicos determinados por una regla de generación.

La geometría euclidiana tradicional constituye una rama de la matemática que se ocupa de las propiedades y mediciones de elementos como puntos, rectas, curvas, planos y volúmenes y también describe los conjuntos formados por la unión de estos elementos cuyas combinaciones forman figuras y formas determinadas.

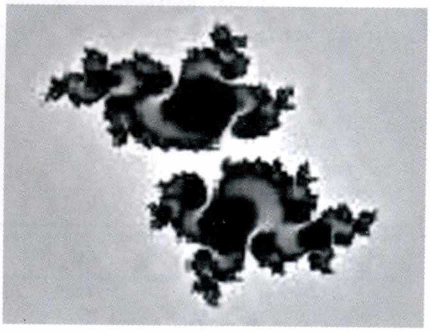
Pero las formas que se presentan en la naturaleza, tales como costas, ríos, montañas, nubes, hojas, árboles, copos de nieve, y una gran cantidad de otros objetos, no pueden ser descriptos en forma sencilla por la geometría tradicional, mientras que la geometría fractal brinda una forma de descripción y un modelo matemático aplicable a estas complejas estructuras de la naturaleza.

GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA FRACTAL
DESARROLLO ANTIGUO, MAS DE 2000 AÑOS	DESARROLLO MODERNO RECIENTE
DIMENSION ENTERA	DIMENSION NO NECESARIAMENTE ENTERA
DESCRIPTA POR FORMULAS	DESCRIPTA POR ALGORITMOS E ITERACIONES
APLICABLE A OBJETOS PRODUCIDOS	APLICABLE A FORMAS NATURALES

3. Presencia

Existen muchas clases de fractales, algunos son curvas geométricas que reproducen sus propiedades cambiando simplemente la escala, estos son llamados "lineales", otros se basan en deformaciones aleatorias y son llamados "no lineales".

La naturaleza brinda ejemplos de fractales a cada paso, una coliflor re-



pite su propia forma en estructuras cada vez más pequeñas, la rama de un árbol es la reproducción del propio árbol a que pertenece, inclusive las neuronas del hombre con sus dendritas y los sistemas circulatorios sanguíneos son claros ejemplos fractales.

También se presentan problemas de fractales en ciencias como la astronomía, la meteorología, la hidrología, la cinematografía y hasta en el urbanismo, en definitiva parecería ser que las estructuras fractales aparecen prácticamente en todos lados.

Los fractales son útiles como modelos para estudiar muy diversos problemas y podríamos decir que es uno de los lenguajes de la naturaleza que no hace mucho comenzó el hombre a comprender.

Es imposible dibujar un fractal por completo ya que la repetición de formas se extiende en teoría indefinidamente, pero podemos aproximarnos y algunos de ellos son muy famosos.

4. La curva de Koch

Uno de los más antiguos fractales es conocido como "la curva de Koch" ya que fue desarrollado por Helge Von Koch, es simple pero muy instructivo.

Para dibujarlo se parte de un segmento de longitud 1 llamado "iniciador" y que constituye la "generación 0" de la curva , ver figura 1.

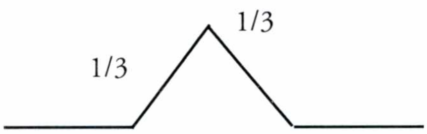
Figura 1

Generación 0 , con L total = 1

Luego se divide el segmento en tres partes iguales y se toma el tercio medio como base para construir un triángulo equilátero, constituyendo la "generación 1" de la curva , en la cual cada subsegmento "S" tiene longitud 1/3 , se borra luego el segmento de la base.

Esto constituye el llamado "generador", ver la figura 2.

Figura 2 S=1/3



Generación 1, con: $S = 1/3$

$L = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 4/3$

Este procedimiento se repite y en cada nueva generación habrá una cantidad de subsegmentos 4^n , de longitud $(1/3)^n$, cada uno de ellos. Y en cada caso, la longitud total de la curva será $L = (4/3)^n$

El paso siguiente, o sea la generación 2 resulta ser según la figura 3.

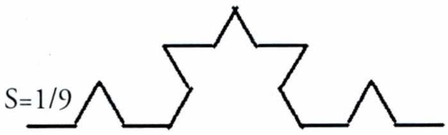


Figura 3

Generación 2, con $S = (1/3)^2 = 1/9$

$L = (4/3)^2 = 16/9$

Tomando este concepto como base es posible construir varios diferentes fractales empleando un polígono cualquiera a modo de iniciador.

Si el polígono base es un triángulo, se genera el fractal denominado "copo de nieve".

5. El "copo de nieve"

Para dibujarlo se parte de un triángulo equilátero (ver figura 4) llamado figura generadora, cada uno de los lados se divide en tres partes iguales y en el tramo central se dibuja un triángulo equilátero hacia afuera (ver figura 5) similar al generador pero más pequeño, se borran las líneas comunes entre el triángulo grande original y los tres pequeños, resultando la figura 6.

FIGURA 4 FIGURA 5 FIGURA 6

El proceso se repite ahora sobre cada uno de los lados y se obtiene la figura 7:

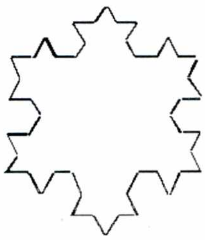


FIGURA 7

Se continúa con el mismo método indefinidamente, incorporando triángulos cada vez menores.

Como puede observarse, luego de cada etapa la longitud de la curva es mayor, finalmente se llega a obtener una curva que tendrá, en el límite, una longitud infinita pero que sin embargo puede ser dibujada en una hoja de papel y el área encerrada por ella será finita.

Supongamos que el triángulo original (fig.4) tiene un lado de longitud 1 , por lo tanto su perímetro "P" es :

$P = 1 + 1 + 1 = 3$

En la figura 6 el perímetro es :

$P = 3 + 1 = 4$

En la figura 7 es :

$P = 3 + 1 + 4/3 = 16/3$

Sucesivamente se llega a que el perímetro vale :

$P=3+1+4/3+(4/3)^2+...+(4/3)^{n-2}$

A medida que "n" crece , el perímetro también lo hace y se tiene así una serie infinita no convergente.

Pero el área encerrada por la curva no es infinita, ya que se la puede dibujar en una hoja de papel, se llega por lo tanto al caso de una curva de longitud "infinita" limitando un área de superficie "finita". Se puede demostrar además que el área final será 1,6 veces el área del triángulo generador.

6. El anti copo

Existe otro fractal llamado "anti copo" que es similar al anterior, parte del mismo triángulo base (fig.4) pero en la figura 5 en lugar de dibujar los triángulos hacia afuera se los dibuja hacia adentro y se repite el proceso siempre de la misma forma.

La figura 8 representa los triángulos dibujados hacia adentro y la 9 el resultado luego de borrar las líneas comunes.

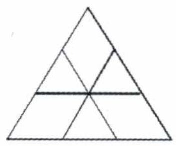


FIGURA 8

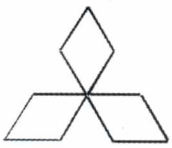


FIGURA 9

Es interesante que el lector trate de imaginar como seguiría la evolución si se repitiera el proceso en cada uno de los lados una vez más y luego otra vez.

Nuevamente en esta figura el perímetro resultará ser infinito pero el área encerrada será finita.

7. El fractal triangular de Sierpinsky

Otro fractal muy conocido es el llamado "fractal triangular de Sierpinsky", para construirlo se parte de un triángulo base (figura 10 a) que es la generación 0 , se inscribe en él un triángulo sombreado (figura 10 b) , se repite el proceso en los tres nuevos triángulos blancos formados (figura 11) repitiéndolo una vez más se llega a la figura 12 y se sigue indefinidamente con el mismo método.

Considerando el área y perímetro de los triángulos "blancos" :

- Figura 10a, generación 0, de área A=1 y perímetro P=3.L
- Figura 10b, generación 1, de área A=1/4 +1/4+1/4=3/4 y perímetro P=1/2L x 3 x 3 = (9/2) x L
- Figura 11, generación 2, de área A= 9/16 y perímetro P=1/4 L x 3 x 9= (27/4)xL

Resulta entonces que una generación "n", tendrá :

Area : $A = (3/4)^n$

Perímetro: $P = 3 \times (3/2)^n \times L$

Obviamente también en este caso la longitud de la curva (suma de los perímetros de los triángulos blancos = P) tiende a infinito.

En la figura 12 , la G3 se tiene área $A = (3/4)^3 = 27/64$ y perímetro $P = 3 \times (3/2)^3 = 81/8 \times L$

8. El fractal cuadrado de Sierpinsky

La figura generadora es un cuadrado de lado 1 y el proceso se muestra en la figura 13.

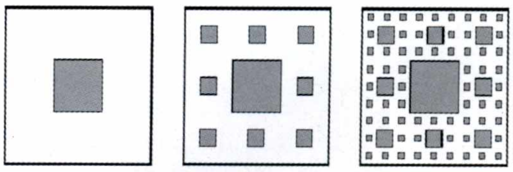


FIGURA 13

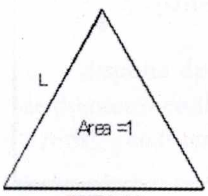


FIGURA 10 a
G0

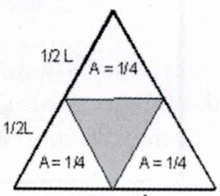


FIGURA 10 b
G1

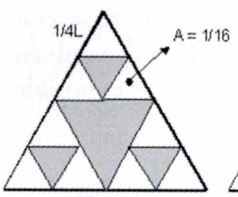


FIGURA 11
G2

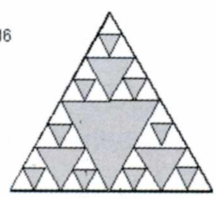


FIGURA 12
G3

Este interesante diseño también se conoce con el nombre de "alfombra".

9. El conjunto de Cantor

Muchos autores consideran el conjunto de Cantor, también llamado "polvo de Cantor", como el primer objeto fractal puro, el mismo fue descripto por el matemático alemán Georg Cantor, inventor de la teoría de los conjuntos, alrededor del año 1872.

Aunque es una figura muy sencilla, presenta todos los atributos asociados a los fractales hasta el momento, sin embargo como se verá mas adelante en este artículo tal vez no sea realmente un fractal en el sentido estricto de su "dimensión fractal".

En este caso el iniciador es un segmento de longitud 1 y el generador es el mismo segmento al cual se le ha eliminado el tercio medio (ver figura 14)

Figura 14

Generación 0 , con L total = 1

Generación 1 , con L = 1/3 + 1/3 = 2/3

Generación 2 , con L = (2/3) 2 = 4/9

Generación 3 , con L = (2/3)3 = 8/27

Está claro que la longitud total será : L = (2/3) n

10. Juego del caos fractal

Así como es posible divertirse con las matemáticas en general, también con las estructuras fractales es posible "jugar".

Para jugar es necesario contar con un dado común en el cual los valores 4, 5 y 6 corresponderán a 1, 2 y 3 respectivamente, o sea un dado con el que solo se puede arrojar un 1, un 2 o un 3.

Se marcan en una hoja tres puntos generadores 1, 2 y 3 cualesquiera (figura 15)

Se elige un punto 4, al azar en cualquier lugar de la hoja.

Se arroja el dado.

Si sale un 2 en el dado , se marca otro punto en el gráfico (el punto nº 5) que se encuentre a ½ de la distancia entre el último punto marcado (que era el nº 4) y el punto nº 2 (ver figura 16) , se procedería de forma similar si saliera un 1 o un 3.

Se repite el proceso un gran número de veces.

Si se dispone de paciencia y perseverancia, con el tiempo comenzará a aparecer una figura definida por una gran cantidad de puntos que increíblemente será el fractal de Sierpinsky!

Aparecerán además algunos puntos que no corresponden exactamente a la figura y que son considerados "el ruido" del proceso aleatorio , pero a media que aumente la cantidad de puntos aumentará la definición del fractal.

11. El juego del triángulo

Supongamos que fabricamos un triángulo de números de la forma siguiente:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

En el que cada número es la suma de los dos números que tiene a derecha e izquierda en la fila de arriba, este triángulo puede hacerse tan extenso como se quiera y se conoce con el nombre de "triángulo de Pascal" o "de Tartaglia", tiene gran cantidad de aplicaciones en álgebra, estadística, problemas físicos, de combinatoria, etc., se conoce desde hace muchos si-

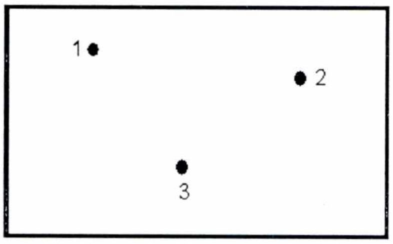


FIGURA 15

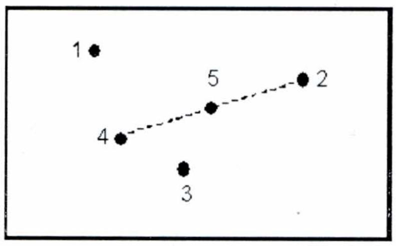


FIGURA 16

glos y no dejan de encontrarse nuevas aplicaciones.

Sombreando ciertos números de acuerdo con algunas reglas se pueden obtener diseños muy interesantes, por ejemplo, si sombreáramos los números impares otra vez aparecería el fractal de Sierpinski.

12. Acerca de la Dimensión

Se llega ahora al complejo concepto de la "dimensión", ¿qué es la dimensión?

Trataremos de dar una respuesta simplificada a esta pregunta sin entrar en conceptos topológicos elevados ya que ello escaparía al alcance de este artículo de carácter meramente introductorio.

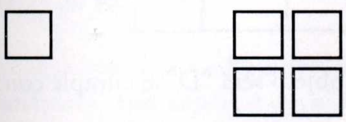
En la geometría clásica un segmento de recta tiene dimensión uno, un plano o cuadrado tiene dimensión dos, y un cuerpo o volumen como un cubo o esfera tiene dimensión tres.

El cálculo de la dimensión puede realizarse por el método llamado similitud por duplicación.

Si se toma un segmento de longitud 1 , al duplicarlo habrá dos segmentos iguales al original :

1 segmento 2 segmentos

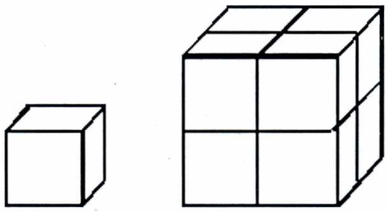
Duplicando los lados de un cuadrado de lado 1 se consigue 4 cuadrados iguales al original :



1 cuadrado 4 cuadrados

En el caso de un cubo de largo, ancho y alto 1 , duplicando todas sus medidas, se logran 8 cubos iguales al original.

1 cubo 8 cubos



Estos resultados pueden expresarse de la forma :

OBJETO	DIMENSION	NUMERO DE COPIAS
SEGMENTO	1	$2 = 2^1$
CUADRADO	2	$4 = 2^2$
CUBO	3	$8 = 2^3$
EN GENERAL	D	$N = 2^D$

En donde el exponente "D" representa entonces la dimensión del objeto considerado.

Y esto funciona muy bien en el caso de los objetos simples y de la geometría tradicional , pero ¿puede aplicarse de la misma forma a un fractal ?

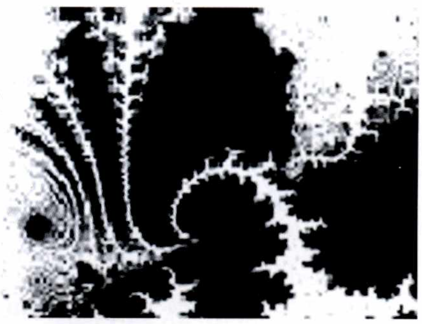
Benoit Mandelbrot planteó en uno de sus artículos sobre geometría fractal una sencilla pregunta:

¿ Cuánto mide la costa de Bretaña ? , sencilla en apariencia ...

Si se dispone de un ovillo de 10 cm de diámetro conformado con hilo de 1 mm , ¿ cuál será su dimensión ?

Depende, para un grado de resolución de 100 metros el ovillo es un punto y su dimensión es cero, para un grado de resolución de 10 cm el ovillo es una esfera tridimensional , para el grado de resolución de 1 cm el ovillo es un conjunto de hilos con dimensión 1 , si el grado de resolución es 0,1 mm cada hilo será como un cilindro . . . y si se sigue con un análisis de este tipo hasta llegar al nivel atómico puede observarse que el valor dimensional depende del grado de resolución y no para de "dar saltos".

La medición de la costa de Gran Bretaña presenta el mismo problema, la longitud dependerá del grado de resolución o apreciación con el cual se trabaje, porque al ir midiendo cada vez con mayor precisión, habrá que sumar el contorno de bahías, rocas, granos de



arena grandes, granos de arena más pequeños, y así hasta el nivel atómico. En mayor o menor grado esto va a suceder en toda medición, y a medida que el objeto sea más rugoso e irregular más crecerá la estimación de su longitud.

¿Y qué sucederá entonces en el caso de los fractales donde las repeticiones de detalles se llevan hasta el límite ?

La medición de formas fractales obligó a introducir nuevos conceptos que trascienden los geométricos clásicos ya que la longitud de una línea fractal depende del instrumento, o de la unidad de medida o escala utilizada, la noción de longitud en este caso pierde su sentido tradicional.

Se ha desarrollado entonces un concepto de dimensión fractal que es una generalización de la dimensión euclidiana.

En general, la dimensión de una curva fractal es superior a la del segmento de dimensión uno que la genera y menor que dos ya que no cubre toda la porción de plano en que se encuentra, por lo tanto la dimensión fractal será un número comprendido entre uno y dos.

La dimensión fractal "D" es una generalización de la dimensión euclidiana "De" , y un primer antecedente es la dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919 que fue posteriormente perfeccionada por Besicovitch.

En el cálculo de la dimensión de un fractal se deben utilizar los conceptos de límite, logaritmo, escalas y medidas.

Para formas fractales de alta complejidad se usan computadoras pero para fractales simples pueden emplearse fórmulas matemáticas como la de Hausdorff-Besicovitch.

La dimensión Hausdorff H(X) de un objeto fractal X , mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L.

Si un segmento de longitud 1 se parte en sub-segmentos de longitud L , se tendrán N(L) partes, de tal forma que resulta:

N(L) x L1 = 1 para cualquiera que sea el valor de L elegido.

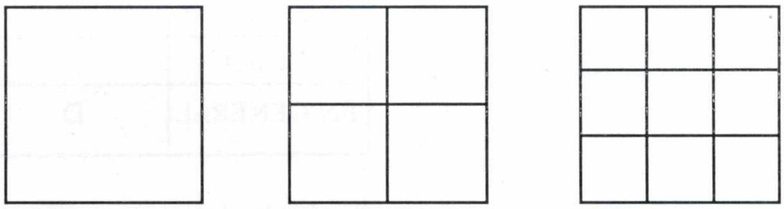
N(L) = 1 L = 1 | N(L) = 2 L = 1/2 | N(L) = 3 L = 1/3 | N(L) = 4 L = 1/4

O sea que si se parte el segmento original de longitud 1 , en cuatro partes de 0,25 cada una resultará :

$$4 \times 0{,}25^1 = 1$$

Si en lugar de un segmento se trabaja con un cuadrado de área 1 y se lo divide en sub-cuadrados de lado L , el número de unidades N (L) cumple con :

$$N(L) \times L^2 = 1$$

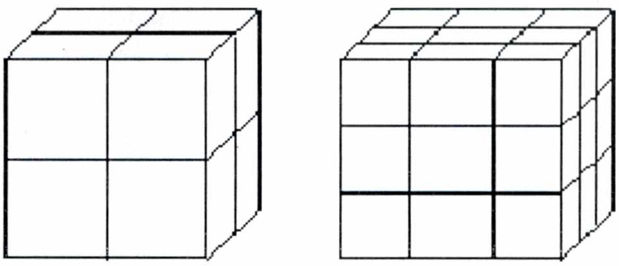


N(L) = 1 L = 1 | N(L) = 4 L = 1/2 | N(L) = 9 L = 1/3

Y si se trata de un cubo de volumen 1 dividido en sub-cubos de longitud de arista L , será :

N(L) x L3 = 1

N(L) = 8
L = 1/2



N(L) = 27
L = 1/3

Generalizando, la dimensión fractal de un objeto será "D" si cumple con:

$$N(L) \times L^D = 1$$

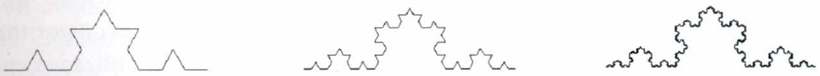
En la cual N(L) es el número de subobjetos o de unidades de tamaño L que cubre o completan el objeto original.

Despejando "D" de la anterior se llega a:

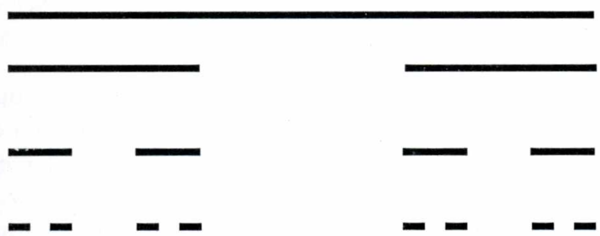
$$D = \log N(L) \ / \ \log (L)$$

Que es la expresión de la Dimensión Fractal para el caso especial de las curvas con autosemejanza perfecta.

Aplicándola a la curva de Koch se obtiene : $D = \log (4) \ / \ \log (3) = 1{,}2628...$



Y al conjunto de Cantor : $D = \log (2) \ / \ \log (3) = 0{,}6309...$



Se acostumbra aceptar que un objeto es fractal si su dimensión fractal "D" es mayor que su dimensión euclídea "De", o sea que debe cumplirse :

$$D > De$$

Por lo tanto el conjunto de Cantor no debería ser considerado realmente fractal.

Y respondiendo al planteo de Mandelbrot sobre la costa de Gran Bretaña, se ha estimado que la dimensión fractal es de 1,2

Hay que aclarar que los fractales "autosemejantes" son aquellos cuyo desarrollo es periódico y los detalles se repiten exactamente a diferente escala, mientras que los fractales no-autosemejantes una infinita variedad de imágenes diferentes e independientes entre si se presenta conforme se van ampliando los sucesivos detalles.

13. Fractales y computación

Existen buenos programas de computación que generan fractales muy interesantes, Fractint es uno de ellos, su operación se basa en programas de función iterada y en su menú pueden encontrarse los fractales más conocidos como así también programas basados en el juego del caos.

Este programa utiliza la técnica de generación IFS (iterated function system) y es muy interesante desde un punto de vista conceptual ya que emplea transformaciones que mantienen la rectitud de las líneas pero puede escalarlas, reorientarlas, rotarlas, etc, generando fractales que pueden ser descriptos por una cantidad de transformaciones lineales en el plano.

Dichas transformaciones pueden ser representadas por matrices únicas para cada estructura fractal y por lo tanto son necesarios solo unos pocos valores para codificar cada fractal.

14. Fractales y caos

No puede dejarse de mencionar la relación existente entre los fractales y la teoría del caos, hay en la naturaleza procesos que son tan sensibles a las condiciones iniciales que toda la información de que se disponga sobre su pasado y su presente no basta para poder predecir su evolución futura.

Ejemplos de procesos caóticos son el ascenso de la columna de humo de un cigarrillo, el desplazamiento de una gota de agua sobre una superficie, la evolución de un incendio forestal, etc.

La teoría del caos se centra en el estudio de los sistemas no lineales, para los cuales el índice de cambio no es constante y que se caracterizan por su carácter impredecible.

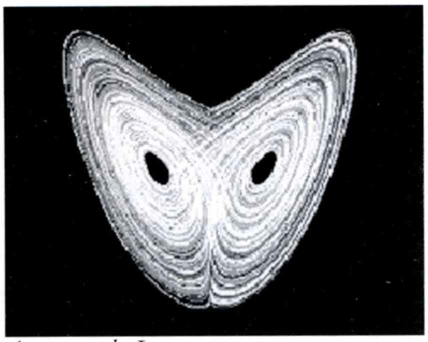
En estos sistemas no lineales cada estado del sistema está determinado por sus estados anteriores y

un cambio ínfimo en los valores iniciales puede tener dramáticos efectos en el resultado final del sistema.

Los sistemas no lineales pueden definir basicamente cuatro tipos diferentes de evolución en el tiempo :

- Converger a un equilibrio estable
- Tener una oscilación estable
- Ser inestables
- Ser caóticos

Edward Lorenz, uno de los pioneros de los estudios del caos, desarrolló la teoría en la década del ´60, si bien se dice que el mismo Pointcaré, ya había propuesto el "efecto mariposa"



Atractor de Lorenz

(una mariposa que bate sus alas en Tokio genera una perturbación que magnificada llega como un terremoto en New York) y sospechado que existen sistemas que son tan sensibles a las condiciones iniciales que muy pequeñas variaciones de partida podrían verse incrementadas en el tiempo de forma que el comportamiento futuro fuese imposible de predecir.

Lorenz trabajó originalmente sobre un modelo de comportamiento atmosférico basado en ecuaciones de mecánica de los fluidos derivadas por Saltzman.

Hizo correr un programa con registro gráfico que mostraba las variaciones climáticas con el tiempo, al repetir el proceso se encontró con un resultado asombroso, por un tiempo ambos comportamientos coincidían, logicamente ya que las variables utilizadas eran idénticas, pero luego de algunas oscilaciones los dos resultados diferían notablemente y ya no había correlación entre ellos al transcurrir el tiempo.

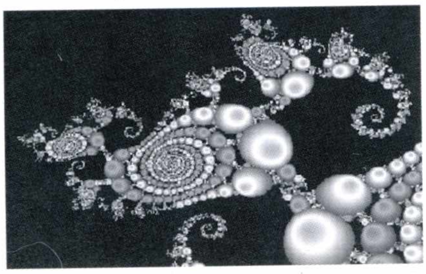
Los estudios demostraron que la drástica diferencia final se debía a imperceptibles variaciones en las condiciones iniciales.

Ecuaciones utilizadas por Lorenz :

$$\Delta x\ (t) = 10\ (\ y - x\ )$$
$$\Delta y\ (t) = 26x - y - xz$$
$$\Delta z\ (t) = -8/3z + xy$$

Cuando Lorenz graficó el sistema llegó al famoso diseño en forma de mariposa que muestra dos focos o "atractores".

Las trayectorias iniciales de un proceso caótico divergen conforme transcurre el tiempo y como resultado el sistema "olvida" rapidamente las condiciones iniciales, por supuesto que la rapidez es aquí un término relativo ya que puede tratarse de horas en un modelo climático o miles de años en un modelo astronómico.



La relación caos-fractales no fue muy bien acogida inicialmente ya que cuestionaba principios establecidos de la ciencia como son la precisión del cálculo, la repetitibilidad de resultados, la reproducción de experimentos o la predictibilidad.

Para dificultar aún mas su aceptación, la teoría caos-fractal no constituye una teoría científica en el sentido clásico de la ciencia ya que por ejemplo no predice observaciones que puedan ser deducidas a partir de enunciados generales y tampoco se encuentra relacionada a los procesos de orden superior, sino que está mas relacionada a los niveles inferiores como son los procesos de medición.

Pero resulta que el propio caos no es aleatorio o impredecible como parecía en un principio, merced a la relación entre la teoría del caos y la geometría fractal, se ha podido comprender como sistemas que en principio se consideraban totalmente caóticos terminan evidenciando patrones predecibles.

Es importante destacar que el término "caos" utilizado en el contexto de la dinámica no lineal en un sentido determinístico, es un caos aleatorio pero de clase restringida, y no debe equiparase al caos definido como desorganización completa y absoluta como es definido en un diccionario.

Las estrucutras fractales son en muchos casos residuos o vestigios generados por procesos de sistemas dinámicos no lineales.

Hoy se sabe que el caos no lo es tanto como parecía y los algoritmos fractales están siendo utilizados en el estudio de procesos de este tipo en ciencias tan diferentes como la economía, la meteorología , la medicina o la demografía.

La teoría de estos sistemas dinámicos no lineales es útil para el estudio de fenómenos como las epidémias, la evolución de modelos climatológicos, la cinética de algunas reacciones químicas, etc.

15. Fractales y arte

Además de ser un instrumento de valor científico, con los fractales se pueden generar estructuras de gran belleza y armoniosidad, y es por ellos que muchos artistas han basado en ellos sus composiciones.

En los últimos años se ha propuesto que los fractales han estado asociados al mundo del arte desde mucho antes de que se realizaran los estudios matemáticos.

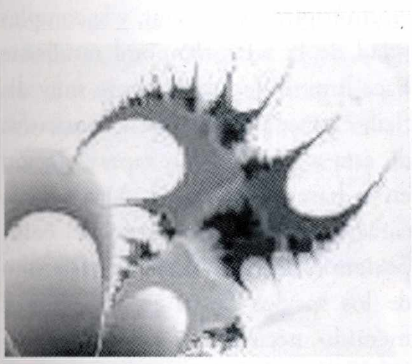
A lo largo de la historia, el ser humano ha utilizado patrones geométricos repetitivos, o recursivos, como elementos decorativos en recipientes, en arquitectura, en la ilustración de libros y en muchas otras manifestaciones artísticas que en mayor o menor grado pueden relacionarse con estructuras de tipo fractal.

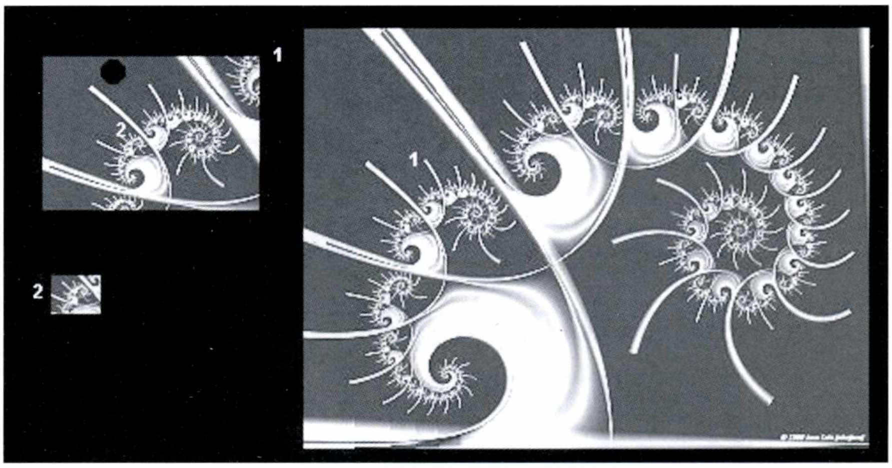
Ya se han desarrollado procesos para compresión de imágenes basados en la geometría fractal y el teorema del collage y también hay que mencionar su aplicación a diversas artes plásticas como la pintura y la música.

Como ejemplo basta recordar que los fractales aparecen en el arte oriental en diseños de kimonos, paisajes y dragones, el artista nipón Hokusai es un definido representante de este tipo de producción, también son reconocidos los trabajos de Maurits Escher, "Pez y escamas" y de Albrecht Durer, "Pentágonos".

16. Conclusión

Los fractales constituyen una herramienta para el estudio del comportamiento de fenómenos complejos e impredecibles y hasta parecería ser que aún dentro del caos puede existir un orden subyacente que debemos ir develando con nuevas herramientas como esta.





Fractal de Julia

Una de las contribuciones más significativas de la geometría fractal ha sido su capacidad para modelar fenómenos naturales complejos tales como el desarrollo de plantas, crecimientos y evoluciones demográficas, formaciones geológicas y variados fenómenos naturales.

La dinámica no lineal unida a los fractales se han utilizado para describir fenómenos tan diferentes como el precio de acciones, congestiones de trásito en grandes urbes y arritmias cardíacas.

Esta teoría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la lingüística, la psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y hasta la electrónica y el arte.

Constituyen además una excelente oportunidad para la difusión de conocimientos matemáticos ya que las formaciones son muy atractivas y de gran impacto óptico, que involucran también conceptos estéticos y creativos.

Con la asistencia de las computadoras brindan la posibilidad de desarrollar un amplio mundo de creaciones visuales de gran valor artístico.

Hasta en actividades tan inesperadas como la composición musical se están utilizando con muy interesantes resultados.

Y si como lo exponía Einstein "Dios no juega a los dados con el universo", la geometría fractal es solo una de esas "nuevas herramientas" de estudio de que disponemos.

Bibliografía de referencia :

1) ROBERT DEVANEY - An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Westview Pr - 2003

2) ARIEL GALBIATI - Fractales, arte ciencia y juego - Enciclopedia popular ilustrada - Abril 2003

3) GUSTAVO HERREN - Fractales - Ed. Errepar - 2002

4) JEFF BERKOWITZ - Fractal Cosmos, the Art of Mathematical Design - Amber Lotus - 1998

5) NIGEL LESMOIR-GORDON - The Colours of Infinity - Clear Books - 2004

6) NIGEL LESMOIR-GORDON - Introducing Fractal Geometry - Totem Books - 2006

7) BENOIT MANDELBROT - The Fractal Geometry of Nature - Freeman - 1982