

Propagación de crecidas en canales abiertos con una isla centrada

1. Resumen

Se presenta la simulación numérica del campo de velocidades y alturas en ríos o canales abiertos empleando la teoría de aguas poco profundas. Se considera el caso de canales con capa límite en la inmediación de las fronteras laterales, con una isla en el centro de la corriente. Las ecuaciones diferenciales de conservación de masa y cantidad de movimiento se discretizan mediante la metodología elementos finitos de Taylor Galerkin. Las condiciones iniciales y de contorno son coherentes con el sistema de ecuaciones conservativas utilizadas. Las condiciones iniciales son las de lago quieto (altura constante y velocidad nula) y la frontera lateral se considera impermeable. Este tipo de simulación involucra una gran complejidad computacional, lo que se traduce en tiempos de procesamiento importantes debido a que el tratamiento mediante un esquema explícito exige incrementos temporales muy bajos. Para mejorar el rendimiento computacional se presenta un enfoque incremental de paralelización. Esto se realiza combinando diversas técnicas de análisis de programas

computacionales, así como el uso de la experiencia de usuarios expertos. Se muestra que fue posible optimizar el tiempo de procesamiento en computadoras con múltiples procesadores.

Palabras Clave: Taylor Galerkin, Aguas poco Profundas, HPC, Propagación de Crecidas.

2. Introducción

Se presenta la aplicación de la teoría bidimensional de aguas poco profundas sin considerar los efectos de la turbulencia que inciden en los términos fuente de las ecuaciones para la simulación numérica del campo de velocidades y alturas en un canal rectangular con una isla en el centro de la corriente con capa límite en la inmediación de las fronteras. Esta aplicación provee una adecuada cuantificación del impacto de las crecidas y la posibilidad de incluir bifurcaciones de la corriente principal, islas y todo tipo de complejidades geométricas y topográficas. ¹ Se considera que las fuerzas de viento y de Coriolis son

despreciables. Las fuerzas gravitatorias, de resistencia de Chézy y aquellas debidas a las variaciones topográficas son las consideradas preponderantes. Se considera que el fondo es fijo (no hay sedimentación) y los bordes laterales se mantienen fijos. ² Se adopta una variación lineal de las pendientes topográficas. Para los bordes laterales se considera la condición de impermeabilidad, es decir que el flujo normal del campo de velocidades en los laterales es nulo. Las ecuaciones diferenciales de conservación de masa y cantidad de movimiento se discretizan mediante la metodología de elementos finitos de Taylor Galerkin. ^{3, 4} La resolución

International Journal of numerical Methods in Fluids, 63, pp 313-340, 2009

- 2 HORRIT, S., "Evaluating wetting and drying algorithms for finite element models of shallow water flows", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, pp. 835-851, 2002.
- 3 ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. 6th Ed., Vol. 3, Butterworth Heine-mann, Oxford, 2005.
- 4 ROIG, B., "One-Step Taylor Galerkin Methods for convection diffusion problems", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 204, pp. 95-101, 2007.

1 LEE SANG HEON, WRIGHT, N. G., "Simple and Efficient Solution of the Shallow Water Equations with Source Terms",

espacial se realiza mediante residuos ponderados (Método de Galerkin) y el avance temporal mediante una aproximación por series de Taylor. Siendo la aproximación de Taylor-Galerkin un método explícito, impone el requerimiento de un incremento temporal pequeño para satisfacer la condición de estabilidad de Courant. El pequeño paso de tiempo requiere de un gran esfuerzo computacional para la obtención de resultados numéricos estables y de utilidad práctica. En la sección de entrada se aplica una onda de crecida que se propaga a lo largo del canal. A la salida se impone una condición de lago quieto (altura constante y velocidad nula). Las fronteras laterales y con la isla se consideran impermeables. Para la discretización del dominio se usan elementos triangulares con interpolación lineal.⁵ Se densifica la malla de elementos finitos cerca de los bordes laterales y alrededor de la isla, donde inciden las fuerzas viscosas.

Este tipo de simulación involucra una gran complejidad computacional, lo que se traduce en tiempos de procesamiento importantes debido a que el tratamiento mediante un esquema explícito exige incrementos temporales muy bajos. Es decir, el tiempo real de ejecución se ve influenciado de manera directa por la cantidad de elementos en los que se descompone el dominio y el tamaño del incremento temporal mínimo (Condición de Courant)³, requerido para satisfacer la convergencia a la solución. Se intenta acelerar el tiempo de ejecución del programa mediante el aprovechamiento de una arquitectura de múltiples procesadores con memoria compartida. Esto se realiza mediante una partición radial de la malla de elementos finitos en la que las

diferentes secciones se asignan a los procesadores de manera intercalada a fin de mantener una carga de trabajo equilibrada reduciendo los costos de comunicación.^{6,7} Se realiza un experimento numérico en el que se consigue una mejora apreciable en los tiempos de procesamiento. Aunque el análisis presentado se realiza sobre un problema con una configuración concreta respecto a la cantidad de elementos del dominio y tamaño del incremento temporal, puede extenderse de manera tal que se pueda realizar un análisis más preciso de los datos y en consecuencia del problema, justificando la utilización de las técnicas desarrolladas en el área de la computación de alto rendimiento.⁸

3. Fundamentos y metodología

El sistema diferencial de ecuaciones conservativas de aguas poco profundas está dado por

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial R d_i}{\partial x_i} = R_s, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$U = (h, hu, hv)^t$ vector de incógnitas h , altura, u , velocidad en x , v velocidad en y .

F_i flujo en las direcciones x e y .

$R d_i$ vector difusivo en x e y .

R_s vector fuente

$$F_1 = \left(p, \frac{p^2}{h} + g \frac{h^2}{2}, \frac{pq}{h} \right)^t \quad F_2 = \left(q, \frac{pq}{h}, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right)^t \quad (2)$$

$$R_s = \left(0, -gh(S_0^x - S_f^x), -gh(S_0^y - S_f^y) \right)^t \quad (3)$$

donde $p = hu$ y $q = hv$, S_0^x pendiente topográfica en la dirección x , S_0^y pendiente topográfica en la dirección y , S_f^x pendiente de fricción en la dirección x , S_f^y pendiente de fricción en la dirección y .

t (superíndice) representa la transposición de un vector.

Las condiciones iniciales son las de lago quieto y las condiciones de borde están dadas por $p(0, y, t) = \mu(y, t)$, donde $\mu(y, t)$ es la cantidad de movimiento en la dirección axial en la sección de entrada.

$h(L_x, y, t) = h_0$ donde h_0 es la altura en la sección de salida L_x .

$q(L_x, y, t) = q(x, 0, t) = q(x, L_y, t) = 0$, estas condiciones definen el flujo normal al contorno sólido y a la isla.⁹

El resultado de las simulaciones viene dado por $U(h, p, q)$. La evolución temporal se realiza en dos semi-etapas

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(R_s + \frac{\partial R d_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_{(t_n)} \quad U^{n+1} = U^n - \Delta t \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial R d_i}{\partial x_i} - R_s \right)_{\left(t_{n+\frac{1}{2}} \right)} \quad (4)$$

6 TINETTI, F. G., PEREZ, M. J., FRAIDENRAICH, A., ALTENBERG, A. E. "Legacy code and parallel computing: updating and parallelizing a numerical model", *The Journal of Supercomputing*, Vol. 76, pp. 5636-5654, 2020.

7 GUSTAFSON, J L, MONTRY, G R, and BENNER, R E. *Development of parallel methods for a 1024-processor hypercube*. United States: N. p., 1988. Web. Doi:10.1137/0909041.

8 SANDERS, B., KATAPODES, N., "Active Flood Hazard Mitigation II: Omnidirectional Wave Control", *Journal of Hydraulic Engineering*, 125, pp 1071- 1083, 1999.

9 VARELLA MARTINEZ, D. M., "Formulação Geral Explícita para a solução de escoamentos em águas rasas", *Teses de Mestrado*, Departamento de Engenharia Oceânica, Universidade de Rio Grande do Sul, Porto Alegre Brasil, 1997.

5 HIRSCH C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 2, John Wiley & Sons, New York, 1997.

BARNEY, B., OpenMP, Lawrence National Laboratory, 2017. <https://computing.llnl.gov/tutorials/openMP>.

t_n y $t_{n+\frac{1}{2}}$ se refieren a la linealización de Taylor por medio de la matriz Jacobiana en dos semi-pasos temporales consecutivos y explícitos.

Las ecuaciones (1) con sus condiciones de borde e iniciales se resuelven por Taylor-Galerkin.^{3, 10} Debido a tratarse de un método explícito, el incremento temporal queda condicionado por el número de Courant a valores muy pequeños. Se ha validado el modelo numérico en cuanto a la incidencia de las fuerzas de Coriolis, de viento y topográficas además de representar el modelo de dam break, también el modelo captura la entrada de una onda simple al canal.¹⁰

Para acelerar el tiempo de ejecución se propone una partición radial de la malla de elementos finitos de acuerdo a lo indicado en la figura 1. Las diferentes secciones se asignan a cada procesador de manera de mantener la carga de trabajo equilibrada.⁷

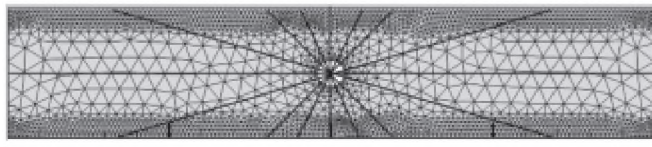


Figura 1: Malla de elementos finitos con particiones radiales

4. Resultados

Utilizando la metodología propuesta, se simula numéricamente el campo de velocidades y alturas para un canal rectangular con una isla en el centro utilizando los parámetros indicados en la Tabla 1.

Descripción	Nomenclatura	Valor
Tiempo de simulación total	T	550 s
Longitud del canal	L_x	200 m
Ancho del canal	L_y	4 m
Paso de tiempo	t_{step}	5×10^{-3} s

Tabla 1. Parámetros de la simulación

Las Figuras 1 y 2 muestran la evolución de los campos de velocidades y alturas del inicio y el final de la simulación. El campo de velocidades está representado por un diagrama de flechas y el de alturas por curvas de nivel. Se puede observar la propagación del pico de crecida. Debido a la densificación de la malla en los bordes se puede observar que se pueden captar los esfuerzos viscosos, lo que se materializa en la uniformidad y paralelismo de las líneas de corriente.

3 ??????????????
10 ?????????????????????

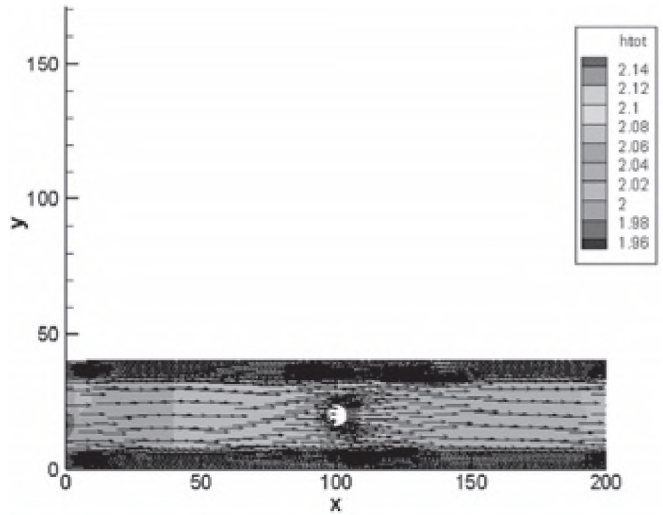


Figura 1: Evolución de los campos de velocidades y alturas para $t=45s$ ($x,y,htot$ en m).

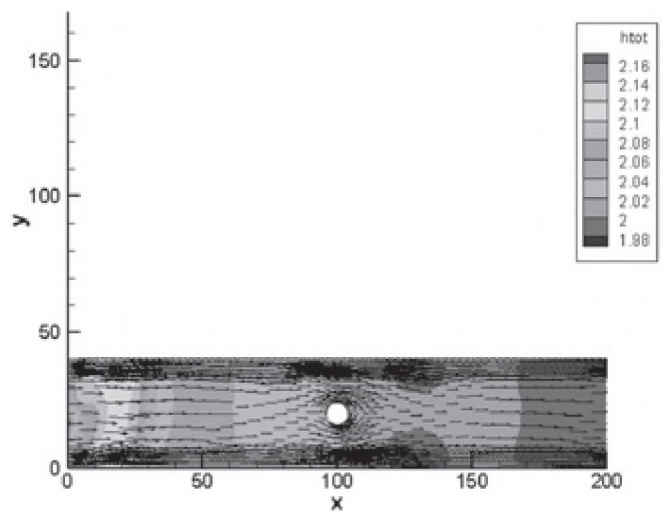


Figura 2: Evolución de los campos de velocidades y alturas para $t=525s$ ($x,y,htot$ en m).

Mediante la partición radial de la malla de elementos finitos de acuerdo a lo indicado en la Figura 1 y asignando a cada núcleo una partición de manera de mantener la carga de trabajo equilibrada⁷ se realizaron experimentos numéricos para evaluar la reducción de los tiempos de procesamiento con respecto a aquellos obtenidos con procesamiento secuencial en operaciones llevadas a cabo en un procesador de las características indicadas en la Tabla 2, asignándose 2 particiones a cada núcleo.

CPU	Intel Xeon 5405 @ 2.00GHz
Max # núcleos	8
Fecha de lanzamiento CPU	Q4'07
Mejora de Rendimiento	66%

Tabla 2. Características del procesador empleado en los experimentos numéricos y porcentaje de mejora en los tiempos de procesamiento.

En todos los experimentos numéricos realizados se observaron ganancias de rendimiento significativas. Más detalles de los experimentos computacionales realizados sobre diferentes configuraciones, así como un análisis más exhaustivo desde el punto de vista computacional pueden encontrarse en ⁷, donde se muestra, por ejemplo, la evolución de rendimiento para 2, 4 y 8 procesadores, además de las diferencias entre diferentes plataformas/hardware de cómputo mencionadas como “desarrollo” o “producción”. Es interesante notar que la metodología de partición de datos es útil para procesamiento paralelo con memoria compartida y distribuida. ⁷

5. Conclusiones

Se realizó un modelo de Taylor-Galerkin para representar la propagación de una onda de crecida en un canal rectangular con una isla en el centro. Se obtuvieron resultados numéricos de los campos de velocidades y alturas de la corriente de agua. Se ha validado el modelo numérico en cuanto a la incidencia de las fuerzas de Coriolis, de viento y topográficas además de representar el modelo de dam break, también captura la entrada de una onda simple al canal [10]. Si bien, para éste problema en particular no se ha llegado aún a una

complejidad de modelo que justifique la validación de los resultados, en un futuro se planea su validación mediante la comparación de los resultados con los datos por software ya validado y con datos experimentales. Debido a tratarse de un método explícito, los tiempos de procesamiento se tornan muy elevados debido a que el incremento temporal es muy pequeño, del orden de la milésima de segundo, lo que llevó a optimizar el tiempo de procesamiento mediante técnicas de HPC.

El enfoque metodológico de partición y planificación del cómputo realizado puede extenderse a otras configuraciones de dominio (cantidad de elementos, cantidad de islas, topología de la malla, etcétera) de manera tal de tender a la minimización de los costos asociados a sincronización y maximizar la ganancia de rendimiento en arquitecturas de cómputo de memoria compartida. Dentro de los trabajos futuros inmediatos, se pueden mencionar el estudio de escalabilidad de cómputo dependiendo no solo de la cantidad de procesadores sino también de la complejidad de malla. Por otro lado, teniendo como objetivo específico la implementación con procesamiento paralelo en memoria distribuida, se planea estudiar la definición de procesos y el uso de una biblioteca de pasaje de mensajes como una implementación de MPI (ej: Open MPI), ya a partir de la partición de datos analizados en este trabajo.