

Simulación de problemas de aguas poco profundas bidimensionales usando el método de Taylor Galerkin en dominios con obstáculos circulares

Palabras Clave: *Taylor Galerkin, Obstáculos Circulares, OpenMP, Capa Limite.*

Resumen

Se presenta un modelo numérico bidimensional de aguas poco profundas no estacionario basado en el Método de Elementos Finitos con el enfoque de Taylor-Galerkin. Mediante el modelo se realiza la simulación de flujo a superficie libre en canales abiertos rectangulares con obstáculos circulares y densificación en los contornos laterales en flujos viscosos y no viscosos. Se hacen simulaciones del canal rectangular con distintas ubicaciones de la isla intermedia con flujo viscoso y no viscoso. Se presentan los resultados del modelo numérico mediante la representación del campo de velocidades y alturas. Debido a la complejidad del problema es necesaria la distribución de la carga computacional en varios procesadores. Esta tarea se realizó con OpenMP bajo una arquitectura de memoria compartida.

1. Introducción

En el estudio de la propagación de

crecidas en ríos o canales abiertos se utilizan frecuentemente obstáculos circulares en la descripción del dominio. Es importante cuantificar el efecto de la viscosidad, el cual se traduce en la presencia de esfuerzos cerca de los bordes laterales. Esto es relevante para la solución del problema de control de crecidas por medio de la solución adjunta o mediante la construcción de la superficie de fases.

Para describir situaciones complejas se utiliza un modelo numérico. En este caso se recurre a una resolución basada en el método de los elementos finitos con un operador de Taylor Galerkin bidimensional de aguas poco profundas.

Se realizan simulaciones de un canal rectangular con un obstáculo cilíndrico colocado internamente para distintos valores del coeficiente de Chèzy, con y sin viscosidad, con todos los términos fuente. Se presentan los resultados del modelo numérico mediante la representación del campo de velocidades y alturas.

Se comparan los resultados de alturas y velocidades con y sin viscosidad con diferentes coeficientes de resistencia.

En el caso de viscosidad presente, estos resultados presentan un pico menor de altura, la que se distribuye gradualmente a partir de la sección de entrada. Se muestra que los resultados cerca del pico de entrada de la crecida representan velocidades y alturas que describen adecuadamente el fenómeno físico. Debido a la complejidad del problema es necesaria la distribución de la carga computacional en varios procesadores. Esta tarea se realizó con OpenMP bajo una arquitectura de memoria compartida.

2. Fundamentos

2.1. Enfoque basado en Taylor Galerkin

En el esquema de Taylor Galerkin [5], la resolución espacial se realiza con un esquema de residuos ponderados o de Galerkin y el avance temporal por medio de un Taylor basado en el conocimiento de las matrices Jacobianas [3,4], (primer orden) que corresponde a las proyecciones de los flujos en las dos coordenadas cartesianas ortogonales. Si se expresa el sistema diferencial de las ecuaciones de aguas poco profundas en forma conservativa

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i} = R_s, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$U(h, p, q)$, vector de incógnitas nodales

F_i , vector de Flujos convectivos en las direcciones x e y, $i = 1, 2$

R_{di} , vector de términos difusivos $i = 1, 2$ debido a los esfuerzos viscosos

R_s , vector de términos fuente (términos de variaciones topográficas y de fricción)

Los flujos en las dos direcciones (X e Y) y el término fuente se pueden escribir en forma explícita :

$$F_1 = \left(p, \frac{p^2}{h} + g \frac{h^2}{2}, \frac{p q}{h} \right)^T \quad (2)$$

$$F_2 = \left(q, \frac{p q}{h}, \frac{q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right)^T \quad (3)$$

$$R_s = \left(0, -gh(S_0^x - S_f^x), -gh(S_0^y - S_f^y) \right)^T \quad (4)$$

H , Profundidad de agua, p flujo de descarga en la dirección x, q flujo de descarga en la dirección y ($S_0^x - S_f^x$), Pendiente topográfica en la dirección x menos la pendiente de fricción en la dirección x ($S_0^y - S_f^y$), Pendiente topográfica en la dirección y y menos pendiente de fricción en la dirección y.

Para facilitar el avance se recurre a una secuencia de dos semi-pasos de avance temporal para los que la solución del primero es condición inicial del segundo.

Primer avance temporal

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t \left(R_s + \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_{(t_n)} \quad (5)$$

Segundo avance temporal

$$U^{n+1} = U^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i} - R_s \right)_{(t_{n+\frac{1}{2}})} \quad (6)$$

Planteo de la resolución del sistema lineal como algoritmo de multipaso

$$M \dot{U} = RHS(U) \quad (7)$$

$$M_L U_{k+1}^{n+1} = RHS(U^n) - (M - M_L) U_k^{n+1}, \quad k = 0, \dots, N \quad (8)$$

$$RHS(U^n) = M U^n + R_s + S_D \quad (9)$$

M_L , Matriz concentrada, M , Matriz de masa global, $R_s + S_D$, Integral de superficie de los gradientes de los (flujos menos los términos viscosos) e integrales de línea de los (flujos menos los términos viscosos) sobre la frontera.

Con la aproximación de Taylor - Galerkin se obtiene este sistema de ecuaciones ordinarias [1,2].

La esencia de esta aproximación es descomponer las matrices en matrices concentradas y desviadoras de manera que se pueda resolver en forma explícito con más simplicidad y que sea convergente a la solución del fenómeno.

$$M_L U_{k+1}^{n+1} = RHS(U^n) - (M - M_L) U_k^{n+1} \quad k = 0, \dots, N \quad (10)$$

Se utiliza el operador de Taylor Galerkin debido a su sencillez de implementación y su carácter explícito. Esta última característica es de gran importancia, ya que se simplifica el proceso de avance temporal en dos semipasos, sin embargo, puede requerir gran cantidad de memoria y carga computacional, lo que hace necesaria la utilización de clusters.

Metodología

Se presenta una simulación densificada de un canal abierto rectangular. Se densifico en los bordes laterales para poner en evidencia los esfuerzos viscosos en la capa límite. Además, se coloca un obstáculo cilíndrico simétricamente distribuido en el canal. Se plantean las hipótesis de aguas poco profundas bidimensionales. Se tiene en cuenta los términos de resistencia de Chezy, los esfuerzos viscosos, distribuciones topográficas. No se considera los esfuerzos provocados por el viento y Coriolis en ningún caso. En la entrada se supone una distribución temporal de la crecida similar a una curva de Gauss cuya propagación temporal y espacial es de interés. Se plantea en este trabajo la resolución de las ecuaciones que representan al canal con viscosidad y sin viscosidad. Se pretende de esta forma interpretar la incidencia del obstáculo circular y de las capas límites viscosas.

Se plantean dos simulaciones con viscosidad de $\mathcal{V}=5$ y $\mathcal{V}=0$. Las hipótesis comunes a los dos casos simulados son:

Canal rectangular ($L_x= 200\text{m}$, $L_y= 40\text{m}$). Donde L_x es la longitud del canal y L_y es el ancho. Si se define P como la cantidad de movimiento en la dirección longitudinal, q como la cantidad de movimiento en la dirección transversal, h como la distribución de las alturas y t el tiempo, se tiene,

Condiciones de contorno de entrada:

$$\begin{aligned}
 P(0, y, t) &= 0.716 + \text{sech}^2[0.03(t - 120)] \\
 q(0, y, t) &= 0.0 \\
 h(0, y, t) &= 2.0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Condiciones de borde de salida:

$$\begin{aligned}
 h(Lx, y, t) &= 2.0 \text{ m} \\
 q(0, y, t) &= 0.0 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Condiciones de borde laterales. Flujos normales al contorno lateral cero ($y = Ly$). Regiones que no se consideran penetrables.

$$q(x, Ly, t) = 0.0 \text{ m} \tag{13}$$

Condición inicial de lago quieto

$$\begin{aligned}
 q(x, y, 0) &= 0.0 \text{ m} \\
 p(x, Ly, t) &= 0.0 \text{ m} \\
 h(x, y, 0) &= 2.0 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Pendientes longitudinales

$$\begin{aligned}
 S_0^x &= 0.00001 \\
 S_0^y &= 0.0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Coefficiente de resistencia de Chézy

$$C = 80 \frac{m^{0.5}}{s} \tag{16}$$

Se muestran resultados del canal rectangular con obstáculo y densificación y/o viscosidad.

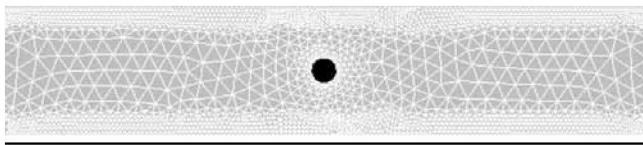


Figura 1: Malla de elementos finitos empleada de 200 por 40 metros densificada en los contornos laterales.

Se construye una malla poco densificada de elementos triangulares bidimensionales con 3 nodos por elemento (interpolación lineal). Se realiza una densificación cerca de los bordes laterales para poder captar las escalas del fenómeno viscoso.

Condiciones de simulación: Chézy 80, Cantidad de Nodos: 2381, Cantidad de elementos: 4400, cantidad de nodos y elementos de borde: 362, Delta T: 0.000125 s

Debido a la complejidad del problema es necesaria la distribución de la carga computacional en varios procesadores. Esta tarea se realizó con OpenMP bajo una arquitectura de memoria compartida.

La configuración del computador utilizado es la siguiente: 1 Procesador Intel Core i5 3230M 3.20 GHz 3MB Cache, 6

GB de memoria RAM. El tiempo de ejecución de las simulaciones fue de 4.1075 horas. Además, se utilizó el cluster de la CRCN (Centro Regional de Ciencias Nucleares del Nordeste, Brasil) como primer paso hacia una implementación con OpenMPI en una arquitectura de memoria distribuida.

Resultados

Las simulaciones se realizan en el tiempo más desfavorable ($T = 120$ s) debido a que llega la crecida máxima en consonancia con la condición de borde aplicada en la sección de entrada. El mallado no es totalmente simétrico, lo que se traduce en asimetría de los gráficos. Para el caso viscoso, se produce una difusión en la distribución del campo de velocidades y alturas en todo el dominio.

Líneas de nivel de alturas y de corriente sin viscosidad en el pico de la crecida ($t = 120$ s)

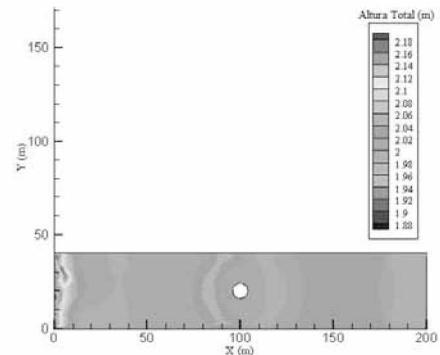


Figura 3: Líneas de nivel de las alturas totales en el tiempo 118 segundos incluyendo todas las fuerzas excepto el tensor de viscosidad y $C=80$ del problema de aguas poco profundas.

La combinación del efecto de Chézy con la eliminación del tensor de viscosidades da un perfil de alturas homogéneo y un crecimiento de alturas en el canal cerca de la sección de entrada del canal. Se nota que aumenta 20 cm respecto de la altura uniforme inicial. En la entrada hay una acumulación de alturas no suavizadas porque no es un flujo viscoso.

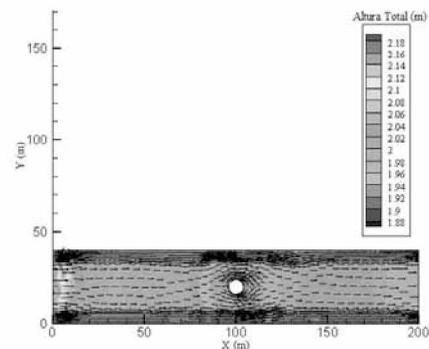


Figura 4: Líneas de corriente y de nivel de las alturas totales en el tiempo 118 segundos incluyendo todas las fuerzas excepto el tensor de viscosidad y $C=80$ del problema de aguas poco profundas

Se produce un incremento en los vectores de velocidad en la sección de entrada coherente (según la ecuación de continuidad) con el aumento de las alturas.

Líneas de nivel de alturas y de corriente con viscosidad en el pico de la crecida ($t = 120s$)

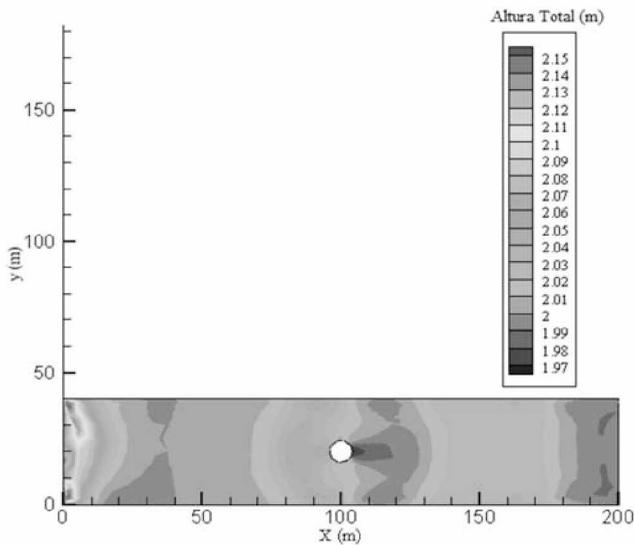


Figura 5: Líneas de nivel de las alturas totales en el tiempo 118 segundos incluyendo todas las fuerzas del problema y $C=40$ de aguas poco profundas

Incluyendo el tensor de viscosidad se puede observar realiza una distribución más gradual del pico de crecidas cerca de la entrada y en todo el dominio debido al efecto difusivo introducido mediante el tensor de viscosidades.

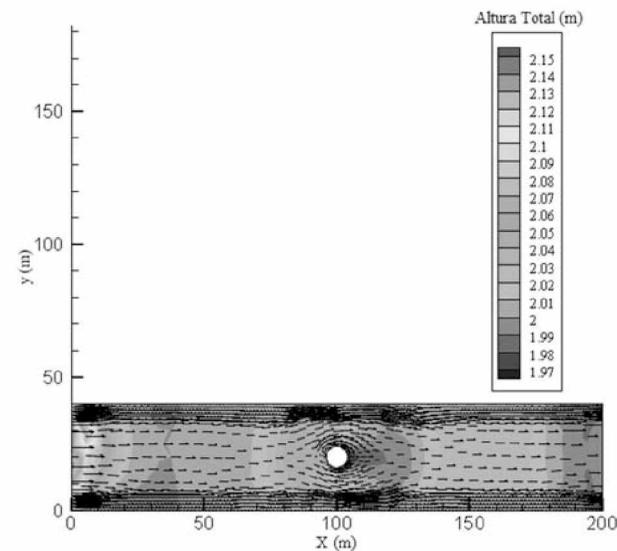


Figura 6: Líneas de corriente y de nivel de las alturas totales en el tiempo 118 segundos incluyendo todas las fuerzas del problema y $C=40$ de aguas poco profundas

En la sección de entrada se produce una acumulación de las líneas de corriente que produce un seguimiento a la capa límite viscosa. Asimismo, hay una distribución ordenada en torno al obstáculo cilíndrico debido a la introducción de los efectos viscosos. Hay un entrecruzamiento en el diagrama de flechas (velocidades) en la entrada del canal debido al efecto de entrada y la formación de la capa límite viscosa.

Conclusiones

Se realizaron simulaciones en canales rectangulares con un obstáculo cilíndrico, con y sin inclusión de los efectos viscosos utilizando la metodología de los elementos finitos con la formulación de Taylor Galerkin. Para captar las escalas físicas debido a la introducción de viscosidad se practica una densificación de los bordes laterales del canal. Las simulaciones muestran que cerca del tiempo de llegada de la crecida al canal se produce una acumulación de Alturas y velocidades que son rápidamente difundidas en el dominio debido a los efectos difusivos de la viscosidad.

Agradecimientos

Al CRCN (Centro Regional de Ciencias Nucleares, Nordeste, Brasil) y al Prof. Marcelo Santana CRCN por su colaboración en la utilización de los clusters de dicho Centro.

Referencias

[1] Heniche M., Secretan Y., Baudreau P., Leclerc M., “A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries”, *Advances in Water Resources*, Vol. 23, pp. 359-372, 2000.

[2] Katapodes, D. and Sanders B. F. “Active Flood Hazard Mitigation. II Omnidirectional Wave Control”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, pp. 1071-1083, 1999.

[3] Sanders, B. F., Katapodes, N. D., “Adjoint Sensitivity Analysis for Shallow – Water Wave Control”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 9, pp. 909-919, 2000.

[4] Roig, B., “One-Step Taylor Galerkin Methods for convection diffusion problems”, *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 204, pp. 95-101, 2007.

[5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. 6th Ed., Vol. 3, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.